FORMES DIFFÉRENTIELLES ET COHOMOLOGIE DE DE RHAM

MÉMOIRE DE MASTER 1 PROPOSÉ PAR LUC MENICHI

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Une 0-*forme* sur U, φ, est une application A de classe C^∞ sur U à valeurs réelles.
Une 1-*forme* sur U, φ, est une "somme formelle" $\varphi = A\ dx + B\ dy + C\ dz$ où A, B et C désignent des applications de classe C^∞ sur U à valeurs réelles et dx, dy et dz sont des "symboles".
Une 2-*forme* sur U, φ, est une "somme formelle" $\varphi = A\ dy\wedge dz + B\ dz\wedge dx + C\ dx\wedge dy$ où A, B et C désignent des applications de classe C^∞ sur U à valeurs réelles et $dy\wedge dz$, $dz\wedge dx$ et $dx\wedge dy$ sont des "symboles".
Une 3-*forme* sur U, φ, est $\varphi = A\ dx\wedge dy\wedge dz$ où A est une application de classe C^∞ sur U à valeurs réelles et $dx\wedge dy\wedge dz$ un "symbole".

On peut additionner les p-formes, multiplier un p-forme par un réel. Donc $\Omega^p(U)$, l'ensemble des p-formes sur U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Grâce aux régles, $dx\wedge dy = -dy\wedge dx$, $dx\wedge dz = -dz\wedge dx$, $dy\wedge dz = -dz\wedge dy$ et $dx\wedge dx = dy\wedge dy = dz\wedge dz = 0$, on peut multiplier une p-forme φ par une q-forme ψ pour obtenir une $p+q$-forme $\varphi\wedge\psi$. Par exemple, soit $\varphi = x^3y\ dx + z\ dy$ et $\psi = x^4\ dx$. Alors $\varphi\wedge\psi = x^3yx^4\ dx\wedge dx + zx^4\ dy\wedge dx = 0 - x^4z\ dx\wedge dy$.

Soit A une 0-forme=une application de classe C^∞, on appelle *différentielle extérieure* de A, noté dA, la 1-forme donnée par $dA := \partial A/\partial x\ dx + \partial A/\partial y\ dy + \partial A/\partial z\ dz$. La différentielle extérieure d'un 1-forme $\varphi = A\ dx + B\ dy + C\ dz$ est la 2-forme $d\varphi = dA\wedge dx + dB\wedge dy + dC\wedge dz = (\partial A/\partial x\ dx + \partial A/\partial y\ dy + \partial A/\partial z\ dz)\wedge dx + (\partial B/\partial x\ dx + \partial B/\partial y\ dy + \partial B/\partial z\ dz)\wedge dy + (\partial C/\partial x\ dx + \partial C/\partial y\ dy + \partial C/\partial z\ dz)\wedge dz = (\partial C/\partial y - \partial B/\partial z)dy\wedge dz + (\partial A/\partial z - \partial C/\partial x)dz\wedge dx + (\partial B/\partial x - \partial A/\partial y)dz\wedge dy$.

Plus généralement, la différentielle extérieure d'un p-forme φ est une $p+1$-forme $d\varphi$. On montre que $d^p : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire vérifiant $d^p\circ d^{p-1} = 0$. Par définition, le *p-ième groupe de cohomologie de De Rham* est l'espace vectoriel quotient $H^p(U) := \text{Ker } d^p/\text{Im } d^{p-1}$.

Le but de ce mémoire sera de bien comprendre la définition de la cohomologie de De Rham et surtout de la calculer lorsque $U = \mathbb{R}^3$ (Lemme de Poincaré), $U = \mathbb{R}^3$ privé d'un point, $U =$ chambre à air... Il existe une trés abondante littérature sur la cohomologie de De Rham ([5, 2, 1, 4, 3] sont les meilleurs références). Car la cohomologie de De Rham est un invariant fondamental de la géométrie différentielle pour distinguer des variétés non difféomorphes.

Références

[1] Raoul Bott and Loring W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer-Verlag, New York, 1982.

[2] Max Karoubi and Christian Leruste, *Méthodes de géométrie différentielle en topologie algébrique. Partie I, II*, vol. 10, Université de Paris VII U.E.R. de Mathématiques, Paris, 1982.

[3] Jacques Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Grenoble Sciences, Edp Sciences, 1996.

[4] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer-Verlag, New York, 2003.

[5] Steven H. Weintraub, *Differential forms*, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1997, A complement to vector calculus.