Université d'Angers Master1

Série d'exercices n4. Géo-Diff. 2011-2012

Exercice 1 : Aire du Tore. Soit $x(u, v) = (a + r\cos u)\cos v$, $y(u, v) = (a + r\cos u)\sin v$ et $z(u, v) = r\sin u$ avec $0 < u < 2\pi$ et $0 < v < 2\pi$ un système de coordonnées sur le tore.

Calculer l'aire de l'image de Q_ε sur le tore où $Q_\varepsilon = \{\varepsilon \leq u \leq 2\pi - \varepsilon \text{ et } \varepsilon \leq v \leq 2\pi - \varepsilon\}$.

Exercice 2 : Aire de la sphère.

(1) Montrer que l'aire de la portion de la sphère de rayon R limitée par deux méridiens d'angles φ_0 et $\varphi_0 + \alpha$ est $2\alpha R^2$.

(2) En déduire que l'aire de la sphère de rayon R est $4\pi R^2$.

Exercice 3 : Aire d'un triangle sphérique. On appelle triangle sphérique, trois points deux à deux distincts sur une sphère reliés par des arcs de grand cercles.

(1) En utilisant l'exercice précédent, montrer que la somme des angles α, β, γ diminuée de π est égale à l'aire du triangle sphérique T multipliée par R^2 :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{T}{R^2} \quad \text{(Formule de Girard 1625).}$$

Cette formule est un cas particulier de la formule de Gauss-Bonnet pour les triangles géodésiques sur une surface de courbure K.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_T K d\sigma.$$

(2) Donner un deuxième exemple de cette formule de Gauss-Bonnet.

Exercice 4 : Hélicoïde. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère l'hélicoïde H donnée par $x(u, v) = v\cos u$, $y(u, v) = v\sin u$ et $z(u, v) = au$ pour $u \in]0, 2\pi[$ et $v \in] - \infty, +\infty[$.

(1) Montrer que H est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner l'équation du plan tangent en tout point de H.

(3) Calculer l'élément infinitésimal de l'aire dS.

(4) Soit Γ_c la courbe située sur H d'équation $u = \ln(v + \sqrt{v^2 + a^2}) + c$. Calculer la longueur de l'arc de courbe compris entre les points $M_1(u_1, v_1)$ et $M_2(u_2, v_2)$.