

Exercice 1 : Coordonnées sphériques.

- (1) Soit Θ la colatitute et φ la longitude. Soit P le demi-plan d'équations $y = 0, x \leq 0$. Montrer que les coordonnées sphériques (r, Θ, φ) induit un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*} \times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}^3$ privé de P .
- (2) En déduire que les coordonnées sphériques définissent un système de coordonnées sur la sphère de rayon R privée d'un méridien et centrée à l'origine. Préciser les courbes de coordonnées ainsi que l'équation du plan tangent en un point
- (3) Démontrer que la sphère toute entière est une surface régulière.

Exercice 2 : Equations cartésiennes de la sphère. Considérons la sphère de rayon R centrée à l'origine.

- (1) Donner l'équation cartésienne de la sphère.
- (2) En déduire que la sphère est une surface régulière. Plus précisément, en déduire 6 applications dont la réunion des graphes coïncide avec la sphère.

Exercice 3 : Une surface paramétrée simple et immergée, non plongée.

On appelle *lemniscate de Bernoulli*, la courbe paramétrée d'équation $x(t) = \frac{t}{1+t^4}$ et $y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$.

- (1) Tracer cette courbe.
- (2) Montrer qu'elle est simple et régulière en chacun de ses points, mais qu'elle n'est pas plongée.
- (3) En déduire une surface paramétrée simple et immergée, non plongée.

Exercice 4 : Ouvert d'une surface régulière.

- (1) Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ telle que } z = 0 \text{ et } (x, y) \in V\}$$

est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

- (2) Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Soit U un ouvert de S . Montrer que U est aussi une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 : Chambre à air.

- (1) Déterminer des coordonnées sur le tore de révolution.
- (2) Donner l'équation du plan tangent en un point.
- (3) Donner les courbes coordonnées.