Université d'Angers **2009-10**
Master 1 **Géometrie**

Examen 1ère session : Mercredi 02/06/10, 9h-12h.

Exercice 1 (10 Points) : La surface d'Enneper. Considérons la surface paramétrée S suivante appelée surface d'Enneper.

$$\begin{array}{rcl} X : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & \begin{cases} x(u,v) := u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, \\ y(u,v) := v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, \\ z(u,v) := u^2 - v^2. \end{cases} \end{array}$$

(1) Montrer que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $X(u,v)$ est un point régulier de S.

(2) Donner l'équation du plan tangent en $X(u,v)$.

(3) Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale. En particulier, vérifier que $\left(\frac{1}{1+u^2+v^2}\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{1}{1+u^2+v^2}\frac{\partial X}{\partial v}\right)$ est une base orthonormée pour la première forme fondamentale.

(4) Soit $\gamma(t)$ la courbe paramétrée tracée sur S définie par $u(t) := t$ et $v(t) := t$. Calculer la longueur de γ entre $t = 0$ et $t = 1$.

(5) Donner le vecteur normal unitaire N en chaque point de S.

(6) Calculer l'élément d'aire $d\sigma$ en coordonnées (u,v) puis l'aire de l'image $X(B)$ où $B := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ telle que } u^2 + v^2 \leq 1\}$.

(7) Calculer $\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial uv}$ et $\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}$. En déduire que les coefficients e, f, g de la deuxième forme fondamentale vérifie $e = 2$, $f = 0$ et $g = -2$.

(8) Calculer la matrice de l'application différentielle dN de l'application de Gauss, relativement à la base $\left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\right)$.

(9) En déduire les directions principales et les courbures principales k_1, k_2.

(10) Calculer la courbure totale K et la courbure moyenne H.

Exercice 2 (10 Points) : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit

$$\begin{array}{rcl} h : U & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & h(x,y) \end{array}$$

une application de classe C^2 sur U. On rappelle que le graphe de h, $z = h(x,y)$, est une surface régulière orienté de $\mathbb{R}^3$.

1) Donner une base du plan tangent $T_M S$ de cette surface en tout point M.

2) Donner les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale I_M en tout point M en fonction de $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$.

3) Donner le vecteur normal unitaire N en tout point M en fonction de $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$.

4) Donner les coefficients e, f, g de la deuxième forme fondamentale II_M en tout point M en fonction de $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$.

Soit S la surface définie par l'équation $x^4 + y^4 + z^4 = 3$.

5) Montrer que S est une surface règulière de $\mathbb{R}^3$.

6) En particulier, vérifier que localement autour du point $P(1,1,1)$, S est le graphe $z = h(x,y)$ d'une application h.

7) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ puis $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ au point $P(1,1,1)$.

8) En déduire E, F, G, e, f, g au point $P(1,1,1)$.

9) En déduire la première forme fondamentale I_P et la deuxième forme fondamentale II_p au point P.

10) Déterminer la courbure normale au point P dans toutes les directions, en particulier, vérifier que P est ombilique.