Master 1

Corrigé Géométrie 2010

Exercice 1

$$\begin{cases} x(u,v) = u - \dfrac{u^3}{3} + uv^2 \\ y(u,v) = v - \dfrac{v^3}{3} + vu^2 \\ z(u,v) = u^2 - v^2 \end{cases}$$

1) $$\frac{\partial \alpha}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 - u^2 + v^2 \\ 2uv \\ 2u \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \begin{pmatrix} 2uv \\ 1 - v^2 + u^2 \\ -2v \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \begin{pmatrix} -4uv^2 - 2u(1-v^2+u^2) = -2u - 2uv^2 - 2u^3 \\ 4u^2v + 2v(1-u^2+v^2) = 2v + 2vu^2 + 2v^3 \\ 1^2 - (v^2-u^2)^2 - 4u^2v^2 = 1 - v^4 - u^4 + 2u^2v^2 \\ -4u^2v^2 = 1 - (v^2+u^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$= (1+u^2+v^2)\begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ pour tout } u, v \in \mathbb{R}$$

donc $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ $\alpha(u,v)$ est un point régulier de la surface paramétrée

2) équation du plan tangent en $\alpha(u,v)$

$$-2u\left(x - u + \frac{u^3}{3} - uv^2\right) + 2v\left(y - v + \frac{v^3}{3} - vu^2\right) + (1-u^2-v^2)(z - u^2 + v^2) = 0$$

c à d

$$-2ux + 2vy + (1-u^2-v^2)\,z$$
$$= 2u\left(-u+\frac{u^3}{3}-\cancel{uv^2}\right) - 2v\left(-v+\frac{v^3}{3}-\cancel{vu^2}\right)$$
$$+ (1-u^2-v^2)(u^2-v^2)$$

3) $$E(u,v) = \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right\|^2 = (1-u^2+v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2$$
$$= 1 + (v^2-u^2)^2 + 2(v^2-u^2) + 4u^2v^2 + 4u^2$$
$$= 1 + (v^2+u^2)^2 + 2(v^2+u^2) = (1+v^2+u^2)^2$$

De même $G(u,v) = (1+u^2+v^2)^2$

en échangeant les rôles de u et de v.

$$F = \frac{\partial\alpha}{\partial u}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial v} = (1-u^2+v^2)\,2uv + 2uv\,(1-v^2+u^2) - 4uv = 0$$

donc $\dfrac{1}{1+u^2+v^2}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}, \dfrac{1}{1+u^2+v^2}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}$ base orthonormée

4) donc $$(ds)^2 = E(du)^2 + 2F(du)(dv) + G(dv)^2$$
$$= (1+v^2+u^2)^2(du)^2 + (1+v^2+u^2)(dv)^2$$

Soit $\gamma(t)$ la courbe tracée sur S. $u = v = t$

donc $du = dv = dt$

$$(ds)^2 = 2(1+2t^2)^2(dt)^2$$
$$ds = \sqrt{2}\,(1+2t^2)\,dt$$

longueur de γ entre $t=0$ et $t=1$ $= \displaystyle\int_0^1 \sqrt{2}\,(1+2t^2)\,dt$

$$= \sqrt{2}\left[t+\frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \sqrt{2}\,\tfrac{5}{3}$$

5) $$d\sigma = \left\| \frac{\partial\alpha}{\partial u} \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial v} \right\| du\, dv = (1+u^2+v^2)\sqrt{4u^2+4v^2+(1-u^2-v^2)^2}\, du\, dv$$

$$= (1+u^2+v^2)\sqrt{4u^2+4v^2+1+(u^2+v^2)^2-2(u^2+v^2)}\, du\, dv$$

$$= (1+u^2+v^2)\sqrt{1+(u^2+v^2)^2+2(u^2+v^2)}\, du\, dv$$

$$= (1+u^2+v^2)^2\, du\, dv$$

ou plus simplement

$$= \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv = (1+u^2+v^2)^2\, du\, dv$$

Soit $\mathcal{B} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } u^2+v^2 \leq 1\}$

aire de $\alpha(\mathcal{B}) = \iint_{\mathcal{B}} (1+u^2+v^2)^2\, du\, dv$

Passant en coordonnées polaires $u = r\cos\theta$
$v = r\sin\theta$

aire de $\alpha(\mathcal{B}) = \displaystyle\iint_{\substack{0<\theta<2\pi \\ 0<r<1}} (1+r^2)^2\, r\, dr\, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 (1+r^2)^2\, r\, dr$$

Soit $x = r^2$ $dx = 2r\, dr$

$$= 2\pi \int_0^1 (1+x)^2 \frac{dx}{2} = \pi \left[\frac{(1+x)^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \pi/_3 \left(2^3 - 1 \right) = \frac{7}{3}\pi .$$

6)

Le vecteur normal unitaire

$$\vec{N} = \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial u} \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial\alpha}{\partial u} \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial v} \right\|} = \frac{(1+u^2+v^2)}{(1+u^2+v^2)^2} \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1+u^2+v^2)} \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix}$$

7) $$e = \vec{N} \cdot \frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc $$e = \frac{1}{1+u^2+v^2} \left(4u^2 + 4v^2 + 2 - 2u^2 - 2v^2 \right) = 2$$

5

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} 2v \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f = N \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} = \frac{1}{1+u^2+v^2}\left(-4uv + 4uv + 2\times 0\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g = N \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} = \frac{1}{1+u^2+v^2}\left(-4u^2 - 4v^2 - 2 + 2u^2 + 2v^2\right) = -2$$

8)

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{2\times -2 - 0^2}{(1+u^2+v^2)^2 \times (1+u^2+v^2)^2 - 0^2} = \frac{-4}{(1+u^2+v^2)^4}$$

d'après les équations de Weingarten

dN a pour matrice relativement à la base $\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial v}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2} = \frac{-2\times(1+u^2+v^2)^2}{(1+u^2+v^2)^4} = \frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$a_{12} = 0 \qquad a_{21} = 0$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2} = \frac{+2\times(1+u^2+v^2)^2}{(1+u^2+v^2)^4} = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$$

donc dN a pour matrice $\dfrac{2}{(1+u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

relativement à la base $\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}$

donc $\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}$ donne la direction principale associée à la courbure maximale $k_1 = \dfrac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$

$\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}$ donne la direction principale associée à la courbure minimale $k_2 = \dfrac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}$

La courbure moyenne $H_p = 0$ est nulle

Exercice 2

1) $z = h(x,y)$ Do Carmo Example 5 p. 162

Posons $x(u,v) = u$

$y(u,v) = v$

$z(u,v) = h(u,v)$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}$$ base du plan tangent

$$\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ -\frac{\partial h}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$ vecteur normal

2) donc $E = 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \quad F = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}$

$$G = 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

3) le vecteur normal unitaire est donné par

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ -\frac{\partial h}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

dom 4)
$$e = N \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}$$

$$f = N \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}$$

$$g = N \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}$$

$$I_M\left(a \frac{\partial X}{\partial u} + b \frac{\partial X}{\partial v}\right) = a^2\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right) + 2ab \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + b^2\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)$$

$$II_M\left(a \frac{\partial X}{\partial u} + b \frac{\partial X}{\partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \times \left(a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)$$

5) $x^4+y^4+z^4=3$

Soit $f(x,y,z) = x^4+y^4+z^4$

$\overrightarrow{\text{grad}}\, f \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 4y^3 \\ 4z^3 \end{pmatrix}$ est nul en $x=y=z=0$

or $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S$. Donc S est une surface

régulière de $\mathbb{R}^3$

6) $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) \neq 0$ donc d'après le théorème des fonctions

implicites sur un voisinage de $(1,1,1)$

S est le graphe $z = h(x,y)$ d'une application

de classe C^∞.

7) $x^4+y^4+h^4(x,y) = 0$

en dérivant par rapport à x

$4x^3 + 4\frac{\partial h}{\partial x} h^3(x,y) = 0$

en faisant $x=y=1$ comme $h(1,1)=1$

on obtient $\frac{\partial h}{\partial x} = -1$. De même $\frac{\partial h}{\partial y} = -1$

en dérivant par rapport à x encore une fois

$3x^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} h^3(x,y) + \frac{\partial h}{\partial x}\, 3\frac{\partial h}{\partial x} h^2(x,y) = 0$

d'où $3 + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \times 1 + (-1)\times 3\times(-1)\times 1 = 0$

$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -6$. De même par symétrie $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -6$

en dérivant par rapport à y

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} h^3(x,y) + \frac{\partial h}{\partial x} 3 \frac{\partial h}{\partial y} h^2(x,y) = 0$$

d'où $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \times 1 + (-1) \times 3 \times (-1) \times 1 = 0$

donc $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = -3$

8) donc $E = 2 \quad F = 1 \quad G = 2$

$$e = \frac{-6}{\sqrt{3}} \quad f = \frac{-3}{\sqrt{3}} \quad g = \frac{-6}{\sqrt{3}}$$

$$e = -2\sqrt{3} \quad f = -\sqrt{3} \quad g = -2\sqrt{3}$$

9) $I_P\left(a \frac{\partial X}{\partial u} + b \frac{\partial X}{\partial v}\right) = 2(a^2 + ab + b^2)$

donc $II_P\left(a \frac{\partial X}{\partial u} + b \frac{\partial X}{\partial v}\right)$

$= -2\sqrt{3}\, a^2 - 2\sqrt{3}\, b^2 - 2\sqrt{3}\, c^2$

10) Soit $\vec{v} \in T S$ un vecteur tangent non nul

la courbure normale au point P dans la direction définie par $\vec{v}$

$$k_n = II\left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) = \frac{II_M(\vec{v})}{I_M(\vec{v})} = -\sqrt{3}$$

La courbure normale au point P est constante dans toutes les directions. En particulier $k_1 = k_2 = -\sqrt{3}$

P est ombilique $K = 3$ elliptique

non planaire