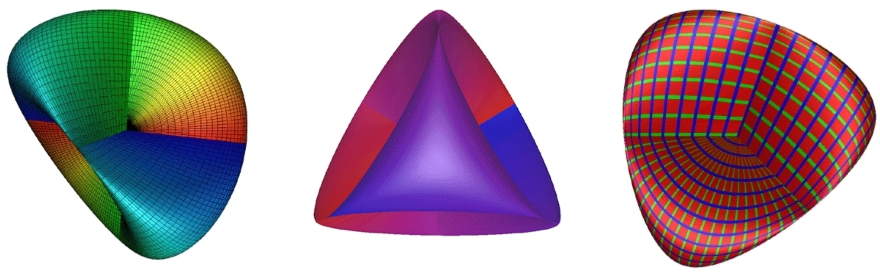
Problème 1. – On considère la surface paramétrée suivante, dite *surface romaine*[1] :

$$\begin{array}{cccl} f: & [0,\pi]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x,y,z)=(\sin 2u\cos v, \sin 2u \sin v, \sin^2 u \sin 2v) \end{array}$$



Plusieurs vues d'une surface romaine

1) Déterminer les cœfficients E G et F de la première forme fondamentale de f et montrer que

$$EG-F^2 = 4\cos^2 2u\sin^2 2u + \sin^4 2u\sin^2 2v + 4\cos^2 2u\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2.$$

Rép.– On a

$$f_u = (2\cos 2u\cos v, 2\cos 2u\sin v, \sin 2u\sin 2v) \quad \text{et} \quad f_v = (-\sin 2u\sin v, \sin 2u\cos v, 2\sin^2 u\cos 2v).$$

D'où

$$E = 4\cos^2 2u + \sin^2 2u\sin^2 2v, \quad F = 2\sin 2u\sin 2v\sin^2 u\cos 2v, \quad G = \sin^2 2u + 4\sin^4 u\cos^2 2v.$$

et, puisque $2\sin^2 u = 1-\cos 2u$, on a aussi

$$F = \sin 2u\sin 2v\cos 2v(1-\cos 2u), \quad G = \sin^2 2u + \cos^2 2v(1-\cos 2u)^2.$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} EG-F^2 & = & (4\cos^2 2u + \sin^2 2u\sin^2 2v)(\sin^2 2u + \cos^2 2v(1-\cos 2u)^2) - \sin^2 2u\sin^2 2v\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 \\ & = & 4\cos^2 2u\sin^2 2u + \sin^4 2u\sin^2 2v \\ & & +4\cos^2 2u\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 + \sin^2 2u\sin^2 2v\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 \\ & & -\sin^2 2u\sin^2 2v\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 \\ & = & 4\cos^2 2u\sin^2 2u + \sin^4 2u\sin^2 2v + 4\cos^2 2u\cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 \end{array}$$

2) Résoudre dans $[0,\pi]\times[0,2\pi]$ l'équation $EG-F^2=0$.

1. Car étudiée par Steiner lors d'un séjour à Rome en 1844.

Rép.– On a $EG - F^2 = 0$ ssi

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos^2 2u \sin^2 2u & = & 0 \\ \sin^4 2u \sin^2 2v & = & 0 \\ \cos^2 2u \cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sin 2u & = & 0 \\ \cos^2 2v(1-\cos 2u)^2 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \cos 2u & = & 0 \\ \sin 2v & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\Sigma_1 \left\{\begin{array}{lcl} \sin 2u & = & 0 \\ \cos 2u & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \Sigma_2 \left\{\begin{array}{lcl} \sin 2u & = & 0 \\ \cos 2u & = & -1 \\ \cos^2 2v & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \Sigma_3 \left\{\begin{array}{lcl} \cos 2u & = & 0 \\ \sin 2v & = & 0 \end{array}\right.$$

On a

- (u,v) solution de Σ_1 ssi $u = 0$ ou $u = \pi$.
- (u,v) solution de Σ_2 ssi $(u,v) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ ou $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ ou $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4})$ ou $(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{4})$
- (u,v) solution de Σ_3 ssi $(u,v) = (\frac{\pi}{4}, 0)$ ou $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ou $(\frac{\pi}{4}, \pi)$ ou $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$ ou $(\frac{\pi}{4}, 2\pi)$
  ou $(u,v) = (\frac{3\pi}{4}, 0)$ ou $(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ou $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$ ou $(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$
  ou $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

3) Soit $S = f([0,\pi] \times [0, 2\pi])$. On note $Irr \subset S$ l'ensemble des images par f des points $(u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$ tels que $(EG - F^2)(u,v) = 0$. Montrer que l'origine $O = (0,0,0)$ est dans Irr et que les autres points de Irr forment les sommets d'un octogone régulier.

Rép.– On a $f(0,v) = f(\pi, v) = (0,0,0)$. Donc toutes les solutions de Σ_1 sont envoyées sur l'origine de $\mathbb{R}^3$ et donc $O \in Irr$. On a

$$f(\frac{\pi}{2}, v) = (0, 0, \sin 2v)$$

donc les solutions de Σ_2 donnent les deux points distincts $(0,0,\pm 1)$. Enfin

$$f(\frac{\pi}{4}, v) = (\cos v, \sin v, \frac{1}{2}\sin 2v) \quad \text{et} \quad f(\frac{3\pi}{4}, v) = (-\cos v, -\sin v, \frac{1}{2}\sin 2v)$$

et les solutions de Σ_3 produisent 4 points distincts : $(\pm 1, 0, 0)$ et $(0, \pm 1, 0)$. Au bilan, excepté l'origine, les points de Irr se répartissent sur un octogone.

4) Soit

$$\begin{array}{rccl} g: & [0,\pi] \times [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (X,Y,Z) = (\sin u \sin v, \sin u \cos v, \cos u) \end{array}$$

la paramétrisation usuelle de la sphère $\mathbb{S}^2$. Déterminer

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & S \\ & (X,Y,Z) & \longmapsto & (x,y,z) = \Phi(X,Y,Z) \end{array}$$

telle que $f = \Phi \circ g$.

Rép.– On a

$$x = \sin 2u \cos v = 2 \sin u \cos u \cos v = 2ZY, \quad y = \sin 2u \sin v = 2 \sin u \cos u \sin v = 2ZX$$

et

$$z = \sin^2 u \sin 2v = 2 \sin v \cos v \sin^2 u = 2XY.$$

Il suffit faut donc prendre

$$\Phi(X,Y,Z) = (2YZ, 2ZX, 2XY).$$

5) Soit P un point quelconque de S. Montrer que $f^{-1}(P)$ contient au moins deux éléments.

Rép.– Notons que si $(X,Y,Z) \in \mathbb{S}^2$ alors $(-X,-Y,-Z) \in \mathbb{S}^2$ et que de plus

$$\Phi(X,Y,Z) = \Phi(-X,-Y,-Z).$$

Donc pour tout $P \in S$, $\Phi^{-1}(P)$ contient au moins deux éléments. Puisque f se factorise par Φ nécessairement $f^{-1}(P)$ contient au moins deux éléments.

6) Montrer que S est invariante par les trois retournements
$r_1 : (x,y,z) \longmapsto (x,-y,-z)$, $r_2 : (x,y,z) \longmapsto (-x,y,-z)$ et $r_3 : (x,y,z) \longmapsto (-x,-y,z)$
Suggestion.– Passer par Φ !

Rép.– Soit $(X,Y,Z) \in \mathbb{S}^2$. Notons qu'alors $(-X,Y,Z) \in \mathbb{S}^2$ et qu'on a

$$\Phi(-X,Y,Z) = (2YZ, -2XZ, -2YX) = r_1(\Phi(X,Y,Z)).$$

Puisque $\Phi(\mathbb{S}^2) = S$, il s'en suit que S est invariante par r_1. Raisonnements similaires pour r_2 et r_3.

7) Montrer que S est invariante par les trois réflexions
$s_1 : (x,y,z) \longmapsto (y,x,z)$, $s_2 : (x,y,z) \longmapsto (z,y,x)$ et $s_3 : (x,y,z) \longmapsto$

(x, z, y)

Rép.– Soit $(X, Y, Z) \in \mathbb{S}^2$. Notons qu'alors $(Y, X, Z) \in \mathbb{S}^2$ et qu'on a

$$\Phi(Y, X, Z) = (2XZ, 2YZ, 2YX) = s_1(\Phi(X, Y, Z)).$$

Puisque $\Phi(\mathbb{S}^2) = S$, il s'en suit que S est invariante par s_1. Raisonnements similaires pour s_2 et s_3.

Problème 2. – Soit $0 < b < a$ et $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. On considère la courbe plane suivante, dite *roulette de Delaunay* :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{b^2}{a} \displaystyle\int_0^t \frac{1}{(1 + e\cos u)\sqrt{1 - e^2\cos^2 u}} du \\ y(t) & = & b\sqrt{\dfrac{1 - e\cos t}{1 + e\cos t}} \end{array} \right. \end{array}$$

1) Déterminer les points réguliers de γ.

Rép.– On a

$$x'(t) = b \frac{\frac{b}{a}}{(1 + e\cos t)\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}}$$

et

$$y'(t) = b \frac{e\sin(t)}{(1 + e\cos t)\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}}$$

d'où

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \left(\frac{b^2}{a^2} + e^2\sin^2 t\right) \frac{b^2}{(1 + e\cos t)^2(1 - e^2\cos^2 t)}.$$

Or $e^2 + \dfrac{b^2}{a^2} = 1$ donc

$$\begin{array}{rcl} \|\gamma'(t)\|^2 & = & \left(1 - e^2 + e^2\sin^2 t\right) \dfrac{b^2}{(1 + e\cos t)^2(1 - e^2\cos^2 t)} \\ & = & \left(1 - e^2\cos^2 t\right) \dfrac{b^2}{(1 + e\cos t)^2(1 - e^2\cos^2 t)} \\ & = & \dfrac{b^2}{(1 + e\cos t)^2}. \end{array}$$

Tous les points sont donc réguliers.

2) Montrer que la fonction abscisse curviligne a pour expression

$$S(t) = \int_0^t \frac{b}{1 + e\cos u} du$$

et déterminer la tangente unitaire $T(t)$ et la normale algébrique unitaire $N_{alg}(t)$ de γ en t.

Rép.– La formule donnée pour l'abscisse curviligne découle directement de la question précédente. D'autre part

$$T(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}} \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ e\sin t \end{pmatrix}$$

et

$$N_{alg}(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}} \begin{pmatrix} -e\sin t \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

3) Montrer que

$$k_{alg}(t) = -\frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \langle \frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t) \rangle.$$

(On pourra reparamétrer γ par l'abscisse curviligne et utiliser les formules de Frenet).

Rép.– Notons $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ S^{-1}$. La courbe $\widetilde{\gamma}$ est paramétrée par la l.a., on peut donc utiliser les formules de Frenet :

$$\frac{d(N_{alg} \circ S^{-1})}{ds}(s) = -\widetilde{k}_{alg}(s) T(S^{-1}(s))$$

où $\widetilde{k}_{alg}(s)$ est la courbure en s de $\widetilde{\gamma}$. On a donc

$$\widetilde{k}_{alg}(s) = -\langle \frac{d(N_{alg} \circ S^{-1})}{ds}(s), T(S^{-1}(s)) \rangle$$

or, si $t = S^{-1}(s)$,

$$\frac{d(N_{alg} \circ S^{-1})}{ds}(s) = \frac{dN_{alg}(t)}{dt} \frac{dS^{-1}(s)}{ds} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \frac{dN_{alg}(t)}{dt}$$

ainsi

$$\widetilde{k}_{alg}(s) = -\frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \langle \frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t) \rangle.$$

Bien sûr, par définition, $k_{alg}(t) = \widetilde{k}_{alg}(s)$.

4) Montrer que la courbure algébrique de γ en t est

$$k_{alg}(t) = \frac{1}{a}\frac{e\cos t}{1 - e\cos t}.$$

Rép.– On a

$$\begin{aligned}
\frac{dN_{alg}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\right)\begin{pmatrix} -e\sin t \\ \frac{b}{a}\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -e\sin t \\ \frac{b}{a}\end{pmatrix} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\right)\begin{pmatrix} -e\sin t \\ \frac{b}{a}\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\begin{pmatrix} -e\cos t \\ 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\langle \frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t)\rangle &= \frac{1}{1-e^2\cos^2 t}\langle \begin{pmatrix} -e\cos t \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ e\cos t\end{pmatrix}\rangle \\
&= -\frac{b}{a}\frac{e\cos t}{1-e^2\cos^2 t}.
\end{aligned}$$

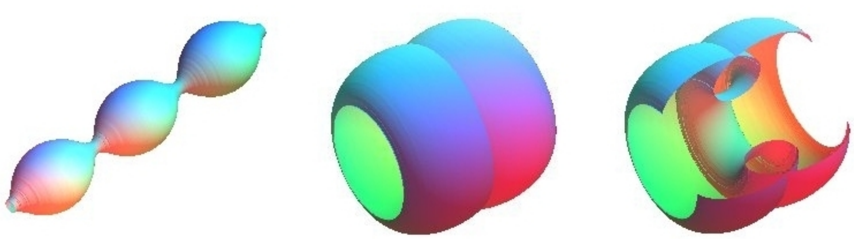
et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\langle \frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t)\rangle &= -\left(\frac{1+e\cos t}{b}\right)\frac{b}{a}\frac{e\cos t}{1-e^2\cos^2 t} \\
&= -\frac{1}{a}\frac{e\cos t}{1-e\cos t}.
\end{aligned}$$

5) On considère la surface de révolution suivante, dite *surface de Delaunay* :

$$\begin{array}{llll}
f: & \mathbb{R}\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 & (t,v) & \longmapsto & (y(t)\cos v, y(t)\sin v, x(t))
\end{array}$$

Calculer la première forme fondamentale de f.



Surfaces de Delaunay (deux valeurs différentes pour a)

Rép.– Un calcul direct montre que

$$E = x'^2 + y'^2 = \frac{b^2}{(1+e\cos t)^2}, \quad F = 0, \quad G = y^2 = b^2\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}.$$

6) Montrer que les cœfficients de la seconde forme fondamentale sont donnés par

$$\mathcal{L} = -\|\gamma'\|^2 k_{alg}(t), \quad \mathcal{M} = 0 \text{ et } \mathcal{N} = \frac{b}{a}\|\gamma'(t)\|$$

(au signe près dépendant du choix de la normale unitaire).

Rép.– Soit

$$n = \frac{1}{\|\gamma'\|}(-x'\cos v, -x'\sin v, y')$$

une normale unitaire. On a

$$\mathcal{L} = \langle n, f_{tt}\rangle = \frac{1}{\|\gamma'\|}\langle \begin{pmatrix} -x'\cos v \\ -x'\sin v \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y''\cos v \\ y''\sin v \\ x'' \end{pmatrix} \rangle = \frac{-x'y'' + y'x''}{\|\gamma'\|} = -\|\gamma'\|^2 k_{alg}(t).$$

Ainsi

$$\mathcal{L} = -\frac{b^2}{(1+e\cos t)^2}\frac{1}{a}\frac{e\cos t}{1-e\cos t}.$$

On a immédiatement

$$\mathcal{M} = \langle n, f_{tv}\rangle = 0.$$

Enfin

$$\mathcal{N} = \langle n, f_{vv}\rangle = \frac{1}{\|\gamma'\|}\langle \begin{pmatrix} -x'\cos v \\ -x'\sin v \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y\cos v \\ -y\sin v \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \frac{x'y}{\|\gamma'\|}$$

d'où

$$\mathcal{N} = \frac{b^3}{a}\frac{1}{\|\gamma'\|}\frac{1}{(1+e\cos t)^2} = \frac{b^2}{a}\frac{1}{1+e\cos t} = \frac{b}{a}\|\gamma'(t)\|.$$

7) Déduire de 5) et 6) que la courbure moyenne de f est constante.

Rép.– La courbure moyenne est donnée par la formule

$$H = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}G + \mathcal{N}E - 2\mathcal{M}F}{EG - F^2}$$

qui devient ici

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{L}}{E} + \frac{\mathcal{N}}{G}\right).$$

Notons que

$$\frac{\mathcal{L}}{E} = -k_{alg} = -\frac{1}{a}\frac{e\cos t}{1-e\cos t}$$

et

$$\frac{\mathcal{N}}{G} = \frac{b^2}{a}\frac{1}{1+e\cos t}\frac{1}{b^2}\frac{1+e\cos t}{1-e\cos t} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-e\cos t}.$$

Finalement

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{L}}{E} + \frac{\mathcal{N}}{G}\right) = \frac{1}{2a}.$$

La courbure moyenne est constante.