Université d'Angers **2025-26**
L3 Math à Distance **Module 8 : Anneaux**

Examen Session 1 : Mardi 12 Mai 2026, 14h-16h30.

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...).
Le nombre total de points est 20.

Exercice 1 : Noyau d'un morphisme d'anneaux Total de la partie 1 : 3 pts

Soit A un anneau commutatif non trivial. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit $f : A \to \mathbb{K}$ un morphisme d'anneaux de A vers $\mathbb{K}$.

(a) (1 point) Montrer que le noyau de f, $\ker f$, est un idéal de A.

(b) (1 point) Montrer que $\ker f$ est un idéal premier.

(c) (1 point) Donner un exemple où $\ker f$ n'est pas un idéal maximal.

Exercice 2 : Polynômes minimaux de bas degré Total de la partie 2 : 4 pts

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Soit B une $\mathbb{K}$-algèbre non triviale. Alors B est muni d'un morphisme d'anneaux $f : \mathbb{K} \to B$. Comme $\mathbb{K}$ est un corps et B n'est pas trivial, alors f est injectif. On peut donc considérer que $\mathbb{K}$ est un sous-anneau de B. Soit α un élément de B. Soit $\mu_\alpha \in \mathbb{K}[X]$ son polynôme minimal.

(a) (1 point) Montrer que μ_α n'est pas de degré 0.

(b) (1 point) Montrer que α appartient à $\mathbb{K}$ ssi μ_α est de degré 1.

(c) (2 points) Supposons que $\mu_\alpha(X) = X^2 + bX + c$ où b et $c \in \mathbb{K}$. Soit $\beta = 2\alpha + b$. Soit μ_β le polynôme minimal de β. Montrer que $\mu_\beta(X) = X^2 - (b^2 - 4c)$.

Exercice 3 : Anneaux de cardinal 9 Total de la partie 3 : 7 pts

(a) (1 point) Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ est un élément irréductible de $\mathbb{F}_3[X]$.

(b) (2 points) Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_3[X]/(X^2{+}1)$ et $\mathbb{F}_3[X]/(X^2)$ ne sont pas isomorphes.

(c) (2 points) Montrer que si B est un anneau de cardinal p^2 où p est un nombre premier différent de 2, alors B est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à un quotient de l'anneau des polynômes $\mathbb{F}_p[X]$ par l'idéal principal $(X^2 - D)$, engendré par un polynôme de la forme $X^2 - D$ où $D \in \mathbb{F}_p$. Indication : utiliser l'exercice sur les polynômes minimaux de bas degré.

(d) (2 points) Montrer que si B est un anneau de cardinal 9 alors B est isomorphe à $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$ ou $\mathbb{F}_3[X]/(X^2)$.

Exercice 4 : Décomposition en somme de carrés Total de la partie 4 : 6 pts

(a) (1 point) $9409 = 97^2$ s'écrit comme la somme des deux carrés d'entiers : $9409 = 97^2 + 0^2$. Trouver l'autre décomposition de 9409 en somme de deux carrés d'entiers.

(b) (1 point) Expliquer à l'aide des théorèmes du cours pourquoi $49725 = 3^2 \times 5^2 \times 13 \times 17$ se décompose en somme de carrés d'entiers.

(c) (1 point) Donner la décomposition de 49725 en facteurs irréductibles dans l'anneau de Gauss $\mathbb{Z}[i]$.

(d) (2 points) En déduire tous les entiers de Gauss $A + iB$ tel que

$$49725 = (A + iB)(A - iB).$$

(e) (1 point) En déduire toutes les décompositions de 49725 en sommes de carrés d'entiers.