

Examen Session 2 : Vendredi 19 Juin 2026, 9h-11h30.

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...).
Le nombre total de points est 20.

Exercice 1 : Image réciproque d'un idéal premier

Total de la partie 1 : 11 pts

Soient A et B deux anneaux commutatifs. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux de A vers B . Soit I un idéal de B . On désigne l'image réciproque $f^{-1}(I)$ de I par \bar{I} .

- (a) (1 point) Montrer que \bar{I} est un idéal de A .
- (b) (1 point) Montrer qu'il existe une unique application $\bar{f} : A/\bar{I} \rightarrow B/I$ telle que la classe d'équivalence de a dans A/\bar{I} s'envoie sur la classe d'équivalence de $f(a)$ dans B/I , pour tout $a \in A$.
- (c) (1 point) Montrer que \bar{f} est un morphisme d'anneaux.
- (d) (1 point) Montrer que \bar{f} est injectif.
- (e) (1 point) Montrer que si I est un idéal premier de B (en particulier différent de B) alors \bar{I} est un idéal premier de A (en particulier différent de A).
- (f) (1 point) Montrer que si B est un anneau intègre, le noyau de f , $\ker f$, est un idéal premier de A .
- (g) (2 points) En déduire que si I est un idéal premier de A alors l'ensemble $I[X]$ des polynômes à coefficients dans I est un idéal premier de $A[X]$. Indication : considérer l'application naturelle $\varphi : A[X] \rightarrow (A/I)[X]$ donnée par la réduction modulo I de chacun des coefficients d'un polynôme de $A[X]$.
- (h) (2 points) On suppose que f est surjectif. Montrer que si I est un idéal maximal alors \bar{I} est aussi maximal. Indication : on pourra montrer que \bar{f} est un isomorphisme d'anneaux.
- (i) (1 point) Donner un exemple de morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ non surjectif et d'idéal maximal I de B tel que \bar{I} ne soit pas maximal.

Exercice 2 : Théorème des restes chinois

Total de la partie 2 : 5 pts

- (a) (2 points) Trouver tous les polynômes réels P tel que
 - le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + X - 5$ soit le polynôme $3X + 3$
 - et le reste de la division euclidienne de P par $2X - 4$ soit le polynôme constant 7.
- (b) (3 points) Trouver tous les polynômes réels P tel que
 - le reste de la division euclidienne de P par $X^3 - X^2$ soit le polynôme $X^2 + X + 1$
 - et le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 3X + 2$ soit le polynôme $5X - 2$.

Exercice 3 : Irréductibilités

Total de la partie 3 : 4 pts

- (a) (2 points) Le polynôme $27X^2 - 18X - 21$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$? dans $\mathbb{Z}[X]$?
- (b) (2 points) Donner la décomposition de $15 + 21i$ en facteurs irréductibles dans l'anneau de Gauss $\mathbb{Z}[i]$.