Devoir 2 : A rendre Mardi 17 Mars 2026.

Le nombre total de points est 20.

Anneaux de cardinal 4.

(a) (8 points) Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_4$ et $\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$ ne sont pas isomorphes.

> **Solution:** Vidéo du regroupement Jeudi 10 Avril 2026, partie 4.
>
> $\mathbb{F}_4$ est le seul corps. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est le seul anneau de caractéristique 4. Dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $X^2 = (a,b)^2 = (a^2, b^2) = 0$ implique $(a,b) = (0,0)$. Donc aucun élément non n'est de carré nul. Dans $\mathbb{F}_{\nvDash}[X]/(X^2)$, il y a un élément ($\overline{X}$!) non nul dont le carré est nul.

(b) (12 points) Montrer que ce sont les seuls anneaux de cardinal 4.

> **Solution:** D'après l'exercice du cours, si caract B=4 alors B est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Sinon la caractéristique de B est 2. Et Soit $\alpha \in B$ et pas dans $\mathbb{F}_2$. Alors $\mu_\alpha(X) = X^2 + bX + c$ et $\mathbb{F}_2[X]/(\mu_\alpha)$ est isomorphe à B. Il y a 4 polynômes de ce type modulo 2.
>
> -$X^2 + X + 1$ irréductible qui donne le corps $\mathbb{F}_4$.
>
> -$X^2 + X = X(X-1)$. D'après le théorème des restes chinois, comme X et $X-1$ sont premiers entre eux, $\mathbb{F}_2[X]/(X(X-1))$ est isomorphe à $\mathbb{F}_2[X]/(X) \times \mathbb{F}_2[X]/(X-1)$. Or $\mathbb{F}_2[X]/(X-a) = \mathbb{F}_2$. Donc B est isomorphe à $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.
>
> -$X^2 + 1 = (X-1)^2$. Posons $\beta = \alpha + 1 \notin \mathbb{F}_2$ alors $\beta^2 = 0$ et donc $\mu_\beta(X) = X^2$. Donc B est isomorphe à $\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$.
>
> -X^2. Donc B est isomorphe à $\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$.