

Equations différentielles

D. Schaub

12 avril 2013

1 Résultats fondamentaux

- Problème de Cauchy
- Lignes isoclines
- Prolongement des solutions
- Régularité des solutions

2 Existence de solutions

- Méthode d'Euler
- Théorème d'existence
- Erreurs pour la méthode d'Euler
- Améliorations

3 Euler et point milieu en défaut

Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application **continue**. Une relation

$$y' = f(t, y) \quad (1)$$

$(t, y) \in U$, $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^m$ est une **équation différentielle ordinaire du premier ordre**.

Définition

Une solution de (1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une **fonction dérivable** $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

- (i) $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in U$
- (ii) $\forall t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$.

Remarque : Une solution correspond à la donnée de **deux** éléments : un intervalle I et une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$!!

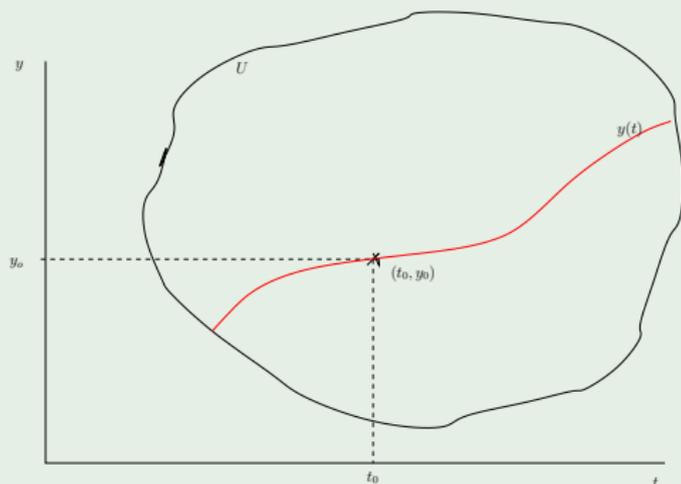
En termes de coordonnées ($m > 1$) dans \mathbb{R}^m , $y = (y_1, \dots, y_m)$ et alors $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est donnée par m applications $f = (f_1, \dots, f_m)$. On peut écrire l'équation (1) sous la forme :

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_m(t)) \\ \vdots \\ y_m'(t) = f_m(t, y_1(t), \dots, y_m(t)) \end{cases}$$

C'est un **système différentiel** (voir cours d'algèbre du 1er semestre).

Le problème principal est : étant donné un point $(t_0, y_0) \in U$, trouver une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ de (1) sur un intervalle $I \ni t_0$ telle que $y(t_0) = y_0$

Cas $m = 1$, (1) devient alors $y' = f(t, y)$ où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Résoudre le problème de Cauchy ($m = 1$), c'est :

Trouver $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, solution de (1), telle que $y(t_0) = y_0$

autrement dit, une **courbe intégrale** de (1) ie. le **graphe de** $t \mapsto y(t)$ passant par le point (t_0, y_0) .

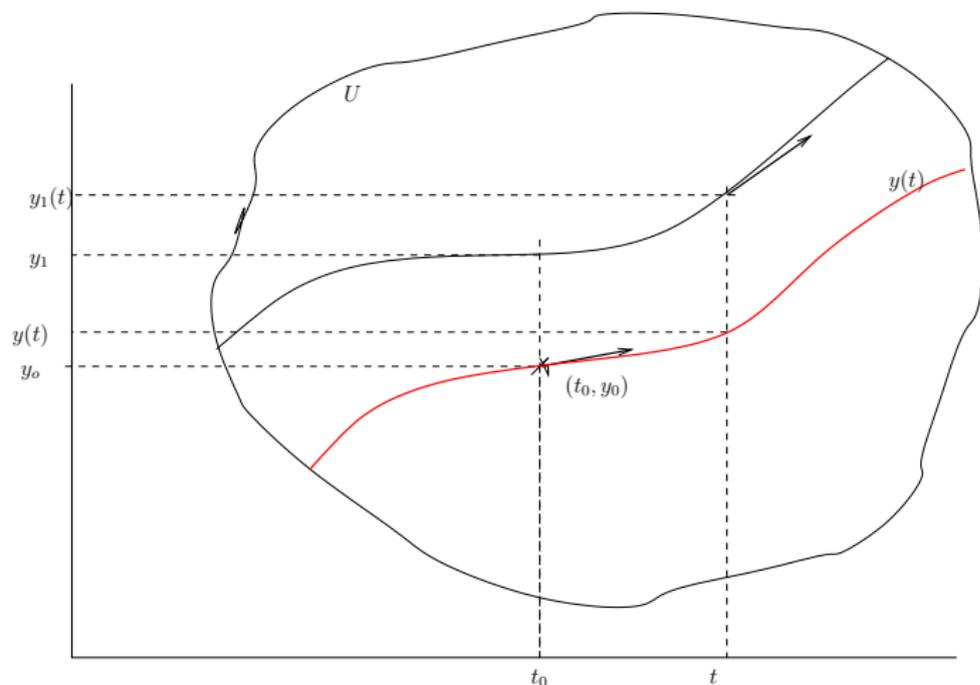
Une autre façon de voir

Pour la courbe représentative Γ de $y = g(t)$, la dérivée $g'(t_0)$ en un point t_0 est la **pente de la tangente en t_0** à la courbe ou encore le vecteur $(1, g'(t_0))$ est tangent à Γ .

NB. On préférera noter la fonction $t \mapsto y(t)$ par g pour des raisons de lisibilité.

Autrement dit, la donnée d'une EDO correspond à la donnée, en tout point (t_0, y_0) d'un vecteur $(1, f(t_0, y_0))$. Autrement dit un champ de vecteurs.

Le dessin suivant illustre le cas d'une EDO avec $m = 1$



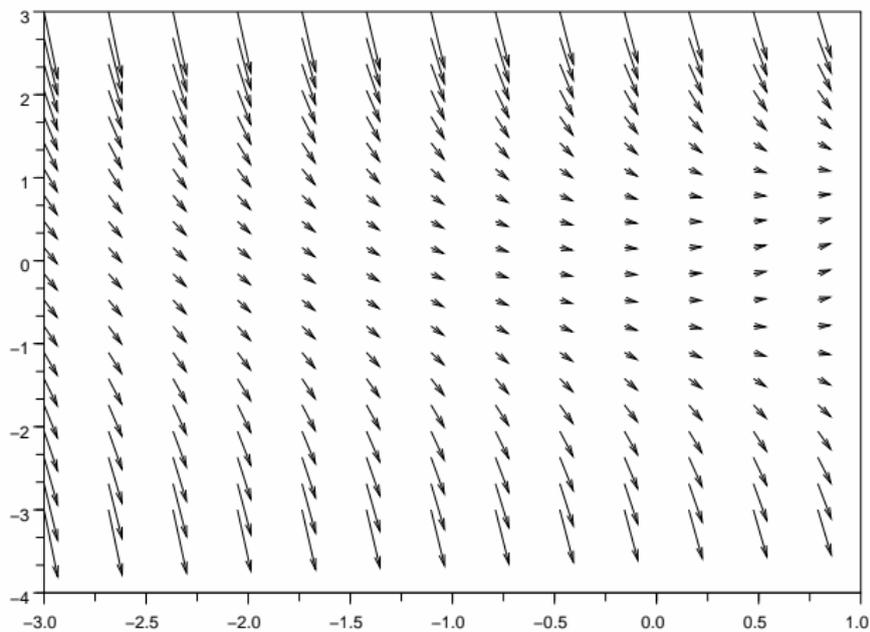
Dans le cas $m = 2$, cela revient à se donner en tout point de coordonnées $(t, y_1, y_2) \in U \subset \mathbb{R}^3$ le vecteur $(1, f_1(t, y_1, y_2), f_2(t, y_1, y_2))$.

Résoudre le problème de Cauchy, avec les **conditions initiales** (t_0, y_{10}, y_{20}) , c'est trouver une courbe de \mathbb{R}^3 , tangente, en tout point, au champ de vecteurs, et passant par le point (t_0, y_{10}, y_{20}) .

Plus généralement, pour $m > 2$, il s'agit de trouver des courbes de \mathbb{R}^m , tangentes en tout point aux vecteurs du champ et satisfaisant à des conditions initiales données.

Exemple de $y' = x - y^2$.

Le champ défini par $y' = t - y^2$



Les **lignes isoclines** de (1) sont les courbes Γ_p définies par $f(t, y) = p$ où $p \in \mathbb{R}$ est une constante. Γ_p est l'ensemble des points M où la tangente D_M a une pente fixée p .

Cas particulier : $p = 0$

Ce sont les points où les tangentes sont **horizontales**.
En quoi, cela est-il intéressant ?

Exemple $y' = t - y^2$

A l'aide de la fonction Scilab **contour2d(x,y,z,nb)** qui représente des lignes de niveau de la surface $z = x - y^2$ (en projection sur le plan - comme une carte d'état-major -, où nb est le nombre de lignes de niveau, on fait apparaître les isoclines ; ce sont les **paraboles d'équations $x = y^2 + p$** .

Lancer Scilab avec le fichier *cours-eqdif1.sce* (D'abord charger *eqdif.sci* et définir la fonction f)

Prolongement des solutions

Définition

1. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (1), alors si $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$, où $I \subset \tilde{I}$, est une solution de (1), telle que $\tilde{y}|_I = y$, on dit que \tilde{y} est un **prolongement de y** .
2. Une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **maximale** si y n'admet pas de prolongement à \tilde{I} avec I strictement inclus dans \tilde{I} .

Théorème

Toute solution se prolonge en une solution maximale.

Si l'ouvert $U = J \times V$, une **solution globale** est une solution définie sur tout J

Remarque : Une solution globale est maximale, mais une solution maximale n'est pas nécessairement globale

Exemple : $y' = y^2$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Une solution "évidente" : $y(t) = 0$.

Les autres sont solutions de $\frac{y'}{y^2} = 1$, qu'on sait résoudre

Comment ?

Régularité des solutions

Théorème

Soit $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est de classe C^k , alors toute solution de (1) $y' = f(t, y)$ est de classe C^{k+1} .

Preuve par récurrence sur k .

Retour sur $y' = x - y^2$

Alors : $y'' = 1 - 2y(x - y^2)$. Les points d'inflexion appartiennent à la courbe d'équation

$$2y(x - y^2) = 1$$

(voir le dessin pour un tracé)

Existence de solutions

Soit donc $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ un ouvert et

$$(1) \quad y' = f(t, y) \text{ où } f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ continue.}$$

Remarquons d'abord que

$y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une solution de (1) sur I , passant par $(t_0, y_0) \in U$
si et seulement si

y est continue et

$$\begin{cases} \forall t \in I, (t, y(t)) \in U \\ \forall t \in I, y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du \end{cases}$$

Cette remarque permet, par des considérations de convergence sous le signe d'intégration, de montrer l'existence de solutions et de majorer les erreurs.

Pour résoudre (1), on cherche à montrer qu'une solution $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du$ ne peut s'éloigner *trop vite* de y_0 . Pour cela, on introduit la notion de **“cylindre de sécurité”** pour (1). U étant un ouvert, il existe un cylindre

$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$$

Un tel cylindre est un fermé borné de \mathbb{R}^{m+1} et f étant continue, f est bornée sur C_0 :

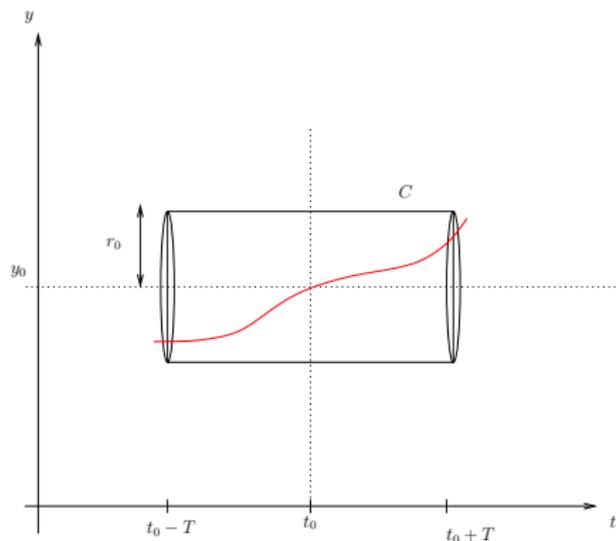
$$M = \sup_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y)\| < +\infty$$

Définition

On dit que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r_0) \subset C_0$ est un **“cylindre de sécurité”** pour (1), si toute solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ tq. $y(t_0) = y_0$ et $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$, reste contenue dans $\overline{B}(y_0, r_0)$.

Proposition

Pour que C soit un cylindre de sécurité, il suffit de prendre $T = \min\{T_0, \frac{r_0}{M}\}$.



La méthode d'Euler

Idée : Construire une solution **approchée**, en confondant, sur l'intervalle $[t_0, t_0 + h]$, $h > 0$ la solution avec le segment de la tangente passant par (t_0, y_0) et de pente $f(t_0, y_0)$, avec h "petit".

Puis recommencer à partir du point $(t_0 + h, y(t_0 + h))$ où $y(t_0 + h)$ est l'extrémité du segment de la tangente précédente, etc ...

et de même de l'autre côté avec des $h < 0$.

Plus précisément : Divisons $[t_0, t_0 + T]$ en $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ et posons $h_n = t_{n+1} - t_n$, $0 \leq n \leq N - 1$ (h_n est appelé **pas**), et, pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$, on pose

$$y(t) = y_n + (t - t_n)f(t_n, y_n)$$

On obtient ainsi un algorithme de construction

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases} \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

La solution approchée est obtenue en traçant, pour chaque n , les segments joignant (t_n, y_n) avec (t_{n+1}, y_{n+1}) .

On va traiter deux exemples pour essayer de comprendre ce que donne la méthode d'Euler :

Exemple 1 : $y' = x - y^2$ sur $[0, 3]$, on prend un pas de 10, puis de 100.

Exemple 2 : équation très simple que l'on sait intégrer $y' = y$ dont les vraies solutions sont $y = ke^x$. On compare le résultat graphique obtenu avec la méthode d'Euler, partant par exemple avec des conditions initiales $y(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$ avec la solution calculée $y = e^x$.

On a fabriqué une fonction *eulergen* qui permet de faire ces tracés. (On intègre sur le segment $[0, x]$, en n pas égaux $h = x/n$. On essaie successivement avec des $n = 100, 1000, 10000$).

Calcul pour cette équation $y' = y$

Sa solution pour les conditions initiales $y(0) = 1$ est $y = e^x$.

On intègre sur $[0, x]$ en n pas égaux à $h = x/n$.

A chaque pas, on a (car $f(t_i, y_i) = y_i$) :

$$y_{i+1} = y_i + hy_i = y_i + \frac{x}{n}y_i = y_i\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

d'où

$$y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x.$$

On constate donc sur cet exemple que $y_n \rightarrow e^x$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, qui est la **solution exacte**.

REMARQUES :

1. On peut noter la proposition suivante qui, a contrario, justifie l'utilisation de cylindres de sécurité

Proposition

Si $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité, tq. $C \subset U$, $T \leq r_0/M$, toute solution approchée y pour Euler est contenue dans $\overline{B}(y_0, r_0)$.

2. On peut majorer théoriquement l'erreur (penser aux méthodes de *majoration sous le signe \int*)

Théorème

(Cauchy, Peano, Arzela) Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ avec $T \leq \min(T_0, r_0/M)$ un cylindre de sécurité pour l'équation

$$(1) \quad y' = f(x, y).$$

Alors, il existe une solution

$$y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \overline{B}(y_0, r_0)$$

de (1) avec pour conditions initiales $y'(t_0) = y_0$.

Idee de preuve : on montre qu'au moins une **sous-suite** de la suite (y_p) , où y_p est la solution approchée par Euler avec un pas constant $h = T/p$ converge vers une limite y , qui est alors solution **exacte** de (1).

Corollaire

Par tout $(t_0, y_0) \in U$, il passe au moins une solution maximale $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ de (1) où I est un ouvert de \mathbb{R}

Remarque : Il n'y a **pas**, en général, unicité de ces solutions maximales

Un contre-exemple à l'unicité

On considère l'équation $y' = 3|y|^{2/3}$. Il y a 2 solutions maximales au moins, définies sur \mathbb{R} , et de conditions initiales $y(0) = 0$, à savoir $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = t^3$.

Proposition

Sous des conditions plus restrictives (f doit être localement lipschitzienne), il y a unicité de la solution (et toute suite (y_p) est convergente vers y)

Cela signifie géométriquement que

**DEUX COURBES INTEGRALES DISTINCTES
NE PEUVENT SE COUPER!**

L'**erreur de consistance** $e_n = z(t_{n+1}) - y_{n+1}$, $0 \leq n < N$ où z désigne la solution exacte passant par (t_n, y_n) . Sur le segment $[t_n, t_{n+1}]$, on part de $y_n = z(t_n)$ et y_{n+1} est obtenu par

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n).$$

Un dessin montre que cette erreur n'a, a priori, que peu de rapport avec l'erreur globale $\theta_n = \max_{0 \leq j < n} |z(t_j) - y_j|$.

Mais sous des hypothèses de régularité, on peut penser que $|\Delta_n| = |y(t_n) - y_n|$ sera du même ordre que

$$|e_0| + |e_1| + \cdots + |e_{n-1}|.$$

Sur $[t_i, t_{i+1}]$, l'erreur e_i , si $f \in \mathcal{C}^1$, est en h_i^2

En effet, par la formule de Taylor-Lagrange, on peut écrire

$$y(t) = y_i + (t - t_i)y'(t_i) + \frac{(t - t_i)^2}{2}y''(t_i) + o((t - t_i)^2)$$

d'où

$$|y(t) - (y_i + (t - t_i)y'(t_i))| = |(y''(t_i) + \epsilon(t - t_i))| \leq h^2*$$

D'où, si $h = 1/n$, en n pas, l'erreur globale sera en $n \times \frac{1}{n^2}$, càd. en $\frac{1}{n}$.

Ce résultat n'est donc pas très bon.

On peut essayer d'améliorer de deux manières

- si $f \in \mathcal{C}^{\geq 2}$, on peut pousser plus loin le développement de Taylor.
Mais nécessité de calculer des dérivées partielles, d'où **peu intéressant**
- on peut rajouter des points au milieu, c'est la **méthode du point milieu**.

Idée : la corde de la fonction y sur $[t, t + h]$ a une pente **voisine** de la pente $y'(t + \frac{h}{2})$ de la tangente en $t + \frac{h}{2}$ (rappel : pour Euler, on prend $y'(t)$).

On écrira donc

$$y(t+h) \cong y(t) + hy'(t + \frac{h}{2})$$

Si $y \in \mathcal{C}^3$, alors par application de la formule de Taylor, on a

$$y(t+h) - y(t) - hy'(t + \frac{h}{2}) = \frac{h^3}{24}y''(t) + o(h^3)$$

L'erreur obtenue est donc en h^3 (au lieu de h^2 dans le cas d'Euler).

Mais, il nous faut calculer

$$y'(t + \frac{h}{2}) = f(t + \frac{h}{2}, y(t + \frac{h}{2}))$$

où $y(t + \frac{h}{2})$ n'est pas connu.

Il faut l'approcher par

$$y(t + \frac{h}{2}) \cong y(t) + \frac{h}{2} f(t, y(t))$$

et, finalement, on prendra

$$y(t + h) \cong y(t) + hf \left[t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{h}{2} f(t, y(t)) \right]$$

On en déduit l'algorithme (dans lequel on prendra, en général, le même h sur tous les intervalles : $h_n = h$ constante)

$$\begin{cases} y_{n+\frac{1}{2}} &= y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n) \\ p_n &= f(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{1}{2}) \\ y_{n+1} &= y_n + h_n p_n \\ t_{n+1} &= t_n + h_n \end{cases}$$

On peut alors vérifier que l'erreur globale théorique ainsi commise est en h^2 .

Traitons l'exemple de l'équation

$$(x + 1)y' + y = \cos x$$

dont la solution générale est

$$y = \frac{\sin x + K}{x + 1}$$

Un contre exemple

Prenons l'équation

$$y' - \frac{3y}{x} = -\frac{5}{x^3}$$

Solution générale de l'équation homogène (*cf. cours L1*)

$$y = Kx^3 \text{ où } K \text{ est une constante}$$

D'où la solution générale

$$y = \frac{1}{x^2} + K_0x^3, \quad K_0 \text{ constante}$$

Remarque : la solution $y = \frac{1}{x^2}$ est la solution passant par le point (1,1), on l'obtient pour $K_0 = 0$.

Appliquons la méthode d'Euler ou celle du point milieu (avec des pas $h = 1/10, h = 1/100, \dots$) et comparons avec la courbe "réelle" pour une solution *approchée* passant par $(1,1)$.

On constate :

- 1 Dans les deux cas, le résultat n'est pas très bon
- 2 La méthode du point milieu est à peine meilleure
- 3 Pour les courbes passant par d'autres points pour $x = 0$, il n'y a pas de problème

Traçons le champ de vecteurs. Celui-ci illustre assez bien le problème.