Intégration numérique

30 mars 2015

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche à calculer une valeur approchée de

$$\int_a^b f(t)dt$$

Pour cela on choisit une subdivision

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$$

et par la relation de Chasle, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt.$$

On est donc ramené à évaluer l'intégrale de f sur un "petit" intervalle $[a_i, a_{i+1}]$.

Idée : sur un tel "petit" intervalle, on approche l'intégrale en "moyennant" f, c'est-à-dire, en écrivant que, sur le petit intervalle, la valeur "moyenne" de f est donnée par

$$\sum_{j=0}^{\ell_i} \omega_{ij} f(\xi_{ij})$$

où $\xi_{ij} \in [a_i, a_{i+1}]$, $0 \leq j \leq \ell_i$ et $\sum_{j=0}^{\ell_i} \omega_{ij} = 1$.

Cela revient à prendre ℓ_i valeurs de f et à leur affecter des coefficients (en $\omega_{ij} = 1/n_{ij}$) pour renforcer ou minimiser certaines de ces valeurs.

Cas le plus simple

On subdivise en n segments égaux
$a_i = \xi_{i0} < \xi_{i1} < \cdots < \xi_{in} = a_{i+1}$ et on prend $\omega_{ij} = \frac{1}{n+1}$, $\forall j$. Alors $\sum \omega_{ij} f(\xi_{ij}) = \sum \frac{1}{n+1} f(\xi_{ij})$ qui est bien la moyenne des $f(\xi_{ij})$.

En appliquant ce qui précède au calcul de l'intégrale de f sur $[a_i, a_{i+1}]$, on obtient :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt \cong (a_{i+1} - a_i) \sum_{j=0}^{\ell_i} \omega_{ij} f(\xi_{ij})$$

Remarque

Si $f(x) = 1$ sur tout le segment $[a_i, a_{i+1}]$, on obtient

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt = (a_{i+1} - a_i) \sum \omega_{ij} \times 1 = (a_{i+1} - a_i).$$

Le résultat est donc exact.

EXEMPLES (retour au global : intégrer sur un segment $[a, b]$) :

Cas le plus simple : $\ell_i = 0$, pour tout i.
Autrement dit : un seul point $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$, $\omega_{i0} = 1$, alors :

$$\int_a^b f(t)dt \cong \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i).$$

On approche donc par une somme de Riemann.

$\xi_i = a_i$: *Méthode des rectangles à gauche*
On obtient alors :

$$\int_a^b f(t)dt \cong \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_i)$$

Autrement dit, si on prend une subdivision régulière, c'est-à-dire que $a_0 = a, a_1 = a + \frac{b-a}{k}, \ldots, a_k = b = a + k\frac{b-a}{k}$,

$$\int_a^b f(t)dt \cong \frac{b-a}{k} \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\frac{b-a}{k})$$

$\xi_i = a_{i+1}$: *Méthode des rectangles à droite*
On obtient alors :

$$\int_a^b f(t)dt \cong \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1} - a_i)f(a_{i+1})$$

Autrement dit, compte tenu du fait que
$a_0 = a, a_1 = a + \frac{b-a}{k}, \ldots, a_k = b = a + k\frac{b-a}{k}$,

$$\int_a^b f(t)dt \cong \frac{b-a}{k}\sum_{i=1}^{k} f(a + i\frac{b-a}{k})$$

Ces deux méthodes sont dites *d'ordre zéro* car elles donnent un résultat exact sur les polynômes de degré 0, les constantes.

$\xi_i = \frac{a_i+a_{i+1}}{2}$ *Méthode du point milieu*. On peut vérifier que cette méthode est exacte sur les polynômes de degré 1, elle est donc d'ordre 1.

On obtient alors :

$$\int_a^b f(t)dt \cong \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1}-a_i)f(\xi_i)$$

et, par conséquent :

$$\int_a^b f(t)dt \cong \frac{b-a}{k}\sum_{i=0}^{k-1} f(a+\frac{(2i+1)(b-a)}{2k})$$

Remarque : Notons que cette méthode revient à la méthode générale avec $\ell_i = 0$, en choisissant pour point $\xi_{i0} = \frac{a_i+a_{i+1}}{2}$.

Cas d'une interpolation linéaire : $\ell_i = 1, \ \forall i$

Faisons $\xi_{i0} = a_i, \xi_{i1} = a_{i+1}$ et identifions le graphe de f avec le segment déterminé par les points $(a_i, f(a_i)); (a_{i+1}, f(a_{i+1}))$. Cela revient à remplacer f par la fonction linéaire

$$p(t) = \frac{(t-a_i)f(a_{i+1})-(t-a_{i+1})f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}$$

On obtient ainsi la *méthode des trapèzes* qui donne les formules

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt \cong \frac{a_{i+1}-a_i}{2}\left(f(a_i)+f(a_{i+1})\right)$$

et dans le cas de subdivisions égales

$$\int_a^b f(t)dt \cong \frac{b-a}{2k}\sum_{i=0}^{k-1}\left(f(a+i\frac{b-a}{k})+f(a+(i+1)\frac{b-a}{k})\right)$$

Cette méthode est encore d'ordre 1.

Remarque : Notons que cette méthode revient à la méthode générale avec $\ell_i = 1$, en choisissant les points $\xi_{i0} = a_i$ et $\xi_{i1} = a_{i+1}$.

Calculons avec les méthodes précédentes "à la main" l'intégrale $I = \int_0^1 t^2 dt$ et comparons à sa valeur exacte : $I = 1/3$!

Cas des rectangles à gauche avec n pas :

$$I_n \cong \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^3}(1+4+9+\cdots+(n-1)^2)$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

D'où

$$|I - I_n| \cong \frac{1}{2n}$$

Cas des rectangles à droite

$$I_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Dans les deux cas, l'erreur décroît "en $\frac{1}{n}$"

En ce qui concerne la **méthode des trapèzes**, le calcul est le suivant :

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) + \frac{1}{2}f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2}$$

L'erreur est "en $\frac{1}{n^2}$"

On a le résultat général suivant, qu'on appliquera pour estimer l'erreur commise dans le cas d'une fonction à dérivée continue :

Proposition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$. Alors $|I - I_n| \leq \frac{M(b-a)^2}{n}$ où $M = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$

La preuve se fait par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f(t) - g_n(t)$ où g_n est la fonction en escalier utilisée.

Dans la méthode des points milieux et, en utilisant une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$, on trouve mieux :

$$|I - I_n| \leq \frac{M}{24} \frac{(b-a)^3}{n^2}$$

En ce qui concerne la méthode des trapèzes, un calcul identique (toujours dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$) donne une majoration :

$$|I - I_n| \leq \frac{M}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2}$$

Dans le cas de la fonction $f(t) = t^2$, on a vu que :

$$I_n = \frac{1}{2n}(0^2 + 1^2) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2},$$

d'où

$$|I - I_n| = \frac{1}{6n^2}$$

On obtient encore une erreur en $1/n^2$.

Observations graphiques

On représente les courbes des applications : $n \mapsto |I - I_n|$ pour les différentes méthodes.

On travaille en coordonnées logarithmiques sur les deux axes pour pouvoir faire croître les abscisses de manière exponentielle (en puissance de 2) : on prend $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096$

Par ailleurs, on calcule un taux r de décroissance (correspondant d'ailleurs aux pentes des droites obtenues ci-dessus) ($N = 5000$, $M = 4000$)

$$r = \frac{ln|I - I_N| - ln|I - I_M|}{ln(N) - ln(M)}$$

On trouve respectivement :
-1.0001494, -1.0002988, -2.0004482, -2.0004482 ce qui correspond aux pentes attendues de -1 et -2 .

Méthode de Simpson

Principe : couper l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ en deux par le milieu $\frac{a_i+a_{i+1}}{2}$ et trouver un polynôme d'interpolation de degré 2, passant par les 3 points $(a_i, f(a_i)), (\frac{a_i+a_{i+1}}{2}, f(\frac{a_i+a_{i+1}}{2})), (a_{i+1}, f(a_{i+1}))$.

Rappel : étant donnés 3 points $(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma)$, il existe un (unique !) polynôme de degré 2, P, tel que

$$P(a) = \alpha, \;\; P(b) = \beta, \;\; P(c) = \gamma.$$

En effectuant le calcul

$$\int_a^b P(t)dt = \frac{b-a}{6}(P(a)+4P(\frac{a+b}{2})+P(b)) = \frac{b-a}{6}(\alpha+4\gamma+\beta)$$

Remarque : On n'a donc pas à calculer P !

Appliquons ce qui précède à la fonction f sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, on obtient

$$I_n = \frac{b-a}{6n}\left(2\sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) + f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\right)$$

où $c_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$.

Proposition

Si f est de classe $\mathcal{C}^5$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$, alors

$$|I - I_n| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}.$$

Note : Il existe aussi des méthodes d'accélération de la convergence (Méthode de Romberg par exemple) qui permettent, comme le nom l'indique, d'améliorer la vitesse de convergence. Autrement dit, qui permette d'obtenir une erreur en $1/n^k$ pour un k plus grand.

Simpson et ...

On peut tracer le résultat de la méthode de Simpson sur le même graphe que précédemment et calculer son taux de décroissance (on trouve -4 !).
On peut aussi regarder les résultats pour la fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Que constate-t-on ? Pourquoi ?