.

Un premier exemple SUITES DEFINIES PAR UNE RELATION DE RECURRENCE

D. Schaub

20 février 2013

Il faut d'abord rappeler les notions “intuitives” de limite ou de valeur d'adhérence pour une suite u_n.

Un réel ℓ est limite de la suite $(u_n)_n$ si, pour tout $\epsilon > 0$, toutes les valeurs de la suite, sauf un nombre fini, sont ϵ-proches de ℓ.

Il faut d'abord rappeler les notions "intuitives" de limite ou de valeur d'adhérence pour une suite u_n.

Un réel ℓ est limite de la suite $(u_n)_n$ si, pour tout $\epsilon > 0$, toutes les valeurs de la suite, sauf un nombre fini, sont ϵ-proches de ℓ.

Ainsi dans l'exemple précédent, 0.5 semble être la limite de la suite $v_{n+1} = g(v_n)$.

Il faut d'abord rappeler les notions "intuitives" de limite ou de valeur d'adhérence pour une suite u_n.

Un réel ℓ est limite de la suite $(u_n)_n$ si, pour tout $\epsilon > 0$, toutes les valeurs de la suite, sauf un nombre fini, sont ϵ-proches de ℓ.

Ainsi dans l'exemple précédent, 0.5 semble être la limite de la suite $v_{n+1} = g(v_n)$.

Un réel α est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ si, pour tout $\epsilon > 0$, une infinité de valeurs de la suite sont ϵ-proches de α.

Nous verrons des exemples de valeurs d'adhérences dans la suite.

Il faut d'abord rappeler les notions "intuitives" de limite ou de valeur d'adhérence pour une suite u_n.

Un réel ℓ est limite de la suite $(u_n)_n$ si, pour tout $\epsilon > 0$, toutes les valeurs de la suite, sauf un nombre fini, sont ϵ-proches de ℓ.

Ainsi dans l'exemple précédent, 0.5 semble être la limite de la suite $v_{n+1} = g(v_n)$.

Un réel α est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ si, pour tout $\epsilon > 0$, une infinité de valeurs de la suite sont ϵ-proches de α.

Nous verrons des exemples de valeurs d'adhérences dans la suite.

But : faire apparaître les différents phénomènes de convergence possibles.

Pour cela, on étudie une suite définie par une relation de récurrence de la forme

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Ce qui, au passage illustrera aussi la sensibilité des phénomènes itératifs aux variations des conditions initiales (cf. cours précédent)

La fonction logistique

On considère la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 4cx(1-x) \end{array}$$

où I désigne l'intervalle $[0, 1]$.

Pourquoi cette fonction ?

Elle est apparue comme modèle d'évolution de population.
On considère qu'un espace donné supporte une population maximale m et que la population v_{n+1} est proportionnelle à v_n, mais aussi à la "place" restante $m - v_n$, c'est-à-dire

$$v_{n+1} = kv_n(m - v_n)$$

En "normalisant", posant $a = km$ et $u_n = \frac{v_n}{m}$, on obtient $u_{n+1} = au_n(1 - u_n)$, qu'on préférera écrire

$$u_{n+1} = 4cu_n(1 - u_n)$$

Remarque : Pour que l'image de I soit contenue dans I, on supposera $0 \leq c \leq 1$. Pourquoi ?

Remarque

Si une suite donnée par $u_{n+1} = g(u_n)$ admet une limite ℓ, alors ℓ est solution de l'équation $x = g(x)$.

Comment le montre-t-on ?

Exemple Prenons $f(x) = 4cx(1-x)$. Comment trouver graphiquement les points $f(x) = x$?

Sur cet exemple, les solutions de $4cx(1-x) = x$ sont :

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 1 - 1/4c \end{aligned}$$

La fonction $f : I \to I$ définie par $x \mapsto f(x) = 4cx(1-x)$ est croissante, puis décroissante et atteint son maximum c en $x = 1/2$.

La fonction f dépend du paramètre c, on préférera donc l'écrire f_c. Notons que la dérivée en est $f_c'(x) = 4c(1-2x)$.

Voyons, à l'aide de Scilab, le graphe de f_c pour quelques valeurs de c entre 0 et 1. On réalise cela, par exemple, en écrivant $c = 0 : .1 : 1$.

Remarque : On essaiera d'éviter une boucle qui contient le tracé des fonctions (pourquoi ?)

Tracés

```
function dessin(c)
  clf()
  x=linspace(0,1,100)
  [a,b]=size(c)
  y=zeros(100,b)
  k=1
  for i=c
    deff("y=g(x)","y=i*f(x)")
    y(:,k)=feval(x',g)
    k=k+1;
  end
  plot2d(x',y)
endfunction
```

Fixons maintenant une valeur de c.

Il s'agit alors d'obtenir les différentes valeurs de la suite $(u_n^c)_n$ (Attention aux notations !).

Pour cela, nous allons construire une fonction scilab

```
iterations(x,g,n)
```

qui prend en argument un réel $x \in I$, une fonction g et un nombre n d'itérations pour obtenir le vecteur

$$(x, g(x), g^2(x), g^3(x), \ldots, g^n(x)).$$

Nous appliquerons la fonction construite aux fonctions f_c

Fonction itération

```
function y=iteration(x,g,n)
  y=1:n+1;
  y(1)=x;
  for i=1:n
    y(i+1)=g(y(i));
  end
endfunction
```

Testons cette fonction, par exemple, pour $g = 0.5f$, $x = 0.2$, $n = 1000$...

Conclusion : on remarque que, très vite, à partir d'un certain rang, toutes les valeurs sont “environ” 0.5.

Si p vérifie $f(p) = p$, on dit que p est un point fixe.

Si p vérifie $f(p) = p$, on dit que p est un point fixe.
Un point fixe p est dit

- **stable** si $|f'(p)| < 1$
- **quasi-stable** si $|f'(p)| = 1$
- **instable** si $|f'(p)| > 1$

Si p vérifie $f(p) = p$, on dit que p est un point fixe.
Un point fixe p est dit

- **stable** si $|f'(p)| < 1$
- **quasi-stable** si $|f'(p)| = 1$
- **instable** si $|f'(p)| > 1$

Si p est stable, alors il est attractif, ie. il existe un intervalle $J \ni p$ tel que $u_{n_0} \in J \Rightarrow u_n \to p$ lorsque $n \to +\infty$.

Si p vérifie $f(p) = p$, on dit que p est un point fixe.
Un point fixe p est dit

- **stable** si $|f'(p)| < 1$
- **quasi-stable** si $|f'(p)| = 1$
- **instable** si $|f'(p)| > 1$

Si p est stable, alors il est attractif, ie. il existe un intervalle $J \ni p$ tel que $u_{n_0} \in J \Rightarrow u_n \to p$ lorsque $n \to +\infty$.
Inversement, si p est instable, alors il est répulsif, ie. il existe un intervalle $J \ni p$ tel que, pour $n >> 0$, $x \neq p \Rightarrow f^n(x) \notin J$.

Si p vérifie $f(p) = p$, on dit que p est un point fixe.
Un point fixe p est dit

- **stable** si $|f'(p)| < 1$
- **quasi-stable** si $|f'(p)| = 1$
- **instable** si $|f'(p)| > 1$

Si p est stable, alors il est attractif, ie. il existe un intervalle $J \ni p$ tel que $u_{n_0} \in J \Rightarrow u_n \to p$ lorsque $n \to +\infty$.
Inversement, si p est instable, alors il est répulsif, ie. il existe un intervalle $J \ni p$ tel que, pour $n >> 0$, $x \neq p \Rightarrow f^n(x) \notin J$.

Exemple

Pour la fonction logistique donnée par $f(x) = 4cx(1-x)$, les solutions de $f(x) = x$ sont $x = 0$ et $x = 1 - 1/4c$.

1. $c < 1/4$, seul $x = 0$ est dans l'intervalle I et $|f'(0)| = 4c < 1$, donc 0 est attractif.
2. $1/4 < c \leq 1$, deux points fixes 0 et $0 < 1 - 1/4c \leq 1 - 1/4$. Alors :
   - ⋆ $f'(1 - 1/4c) = 2 - 4c$, d'où $1/4 < c < 3/4 \Rightarrow$ point attractif ;
   - ⋆ $3/4 < c \Rightarrow$ point répulsif.

Appliquons ce qui précède à l'exemple de la suite logistique $f(x) = 4cx(1-x)$, $0 \leq c \leq 1$ en utilisant *Scilab* pour faire les calculs et les tracés.

On prendra $u_0 = 0.2$ et différentes valeurs de c :
$c = 0, 0.1, 0.25, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.75, 0.9, 0.99$.

Le dessin obtenu s'appellera, quelle que soit sa forme, un colimaçon.

Reste à interpréter ce qu'on a obtenu et à poursuivre l'étude... en traçant la fractale obtenue par une représentation des valeurs des itérations de 100 à 200... voir le diagramme..