Questions de précision : dérivation, suites

D. Schaub

7 février 2012

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto |\ln x|$ et $F_k = f^k = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{k \text{ fois}}$

Comment varie $F_k(x)$ quand x varie légèrement ?

Prenons $h = 10^{-6}$ et représentons l'erreur relative, soit la fonction

$$k \mapsto \frac{|F_k(2+h) - F_k(2)|}{F_k(2)}$$

en fonction de k (on utilise des coordonnées logarithmiques pour les ordonnées).

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+ , x \mapsto |\ln x|$ et $F_k = f^k = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{k \text{ fois}}$

Comment varie $F_k(x)$ quand x varie légèrement ?

Prenons $h = 10^{-6}$ et représentons l'erreur relative, soit la fonction

$$k \mapsto \frac{|F_k(2+h) - F_k(2)|}{F_k(2)}$$

en fonction de k (on utilise des coordonnées logarithmiques pour les ordonnées).

Constat : l'erreur relative augmente d'abord exponentiellement en fonction de k, pour atteindre aux environs de $k = 25$ une valeur plus grande que 1 !

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto |\ln x|$ et $F_k = f^k = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{k \text{ fois}}$

Comment varie $F_k(x)$ quand x varie légèrement ?

Prenons $h = 10^{-6}$ et représentons l'erreur relative, soit la fonction

$$k \mapsto \frac{|F_k(2+h) - F_k(2)|}{F_k(2)}$$

en fonction de k (on utilise des coordonnées logarithmiques pour les ordonnées).

Constat : l'erreur relative augmente d'abord exponentiellement en fonction de k, pour atteindre aux environs de $k = 25$ une valeur plus grande que 1 !

Si x est connu à 10^{-6}, on ne peut connaître $F_k(x)$ pour $k \geq 25$

Mise en œuvre

On entre la fonction f et on calcule l'itérée k fois pour un nombre réel x. Cela est réalisé dans *Scilab* par la fonction y=iterees(k,x).

Les fonctions graphe(n) et grapheCompare(n,h) tracent les graphes des fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $k \mapsto F_k(2)$ et $k \mapsto F_k(2+h)$ pour k variant de 0 à n, en $x = 2$, où h est une petite variation autour de 2.

Pour finir, la fonction erreurRel(n,h) trace le graphe, pour $k = 0$ à n de

$$k \mapsto \frac{|F_k(2+h) - F_k(2)|}{F_k(2)}$$

(noter l'utilisation de coordonnées logarithmiques pour y)

Evaluation de l'erreur systématique d'une méthode

On veut calculer numériquement la dérivée d'une fonction f, qu'on suppose indéfiniment dérivable, en un point x_0. On peut utiliser la définition

$$(*)\ f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Evaluation de l'erreur systématique d'une méthode

On veut calculer numériquement la dérivée d'une fonction f, qu'on suppose indéfiniment dérivable, en un point x_0. On peut utiliser la définition

$$(*)\ f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

mais aussi la formule

$$(**)\ f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

Evaluation de l'erreur systématique d'une méthode

On veut calculer numériquement la dérivée d'une fonction f, qu'on suppose indéfiniment dérivable, en un point x_0. On peut utiliser la définition

$$(*)\ f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

mais aussi la formule

$$(**)\ f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

Il s'agit, dans chaque cas, de majorer l'erreur.

La formule de Taylor-Young permet d'écrire les deux égalités suivantes

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=\frac{f''(x_0)}{2}h+o(h)$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}-f'(x_0)=\frac{f^{(3)}(x_0)}{6}h^2+o(h^2)$$

La formule de Taylor-Young permet d'écrire les deux égalités suivantes

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}h + o(h)$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) = \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}h^2 + o(h^2)$$

La majoration est donc

dans le cas de (*), en h
dans le cas de (**), en h^2

Cette dernière est donc bien meilleure.

Utilisation d'échelles logarithmiques

- Lorsque les variations de y sont très petites devant x, on a intérêt à utiliser une échelle logarithmique en x.

Exemple : $y = ln(x)$. Si on prend pour x une échelle logarithmique, on représente en fait la courbe

$y = f(u)$ où $u = ln(x)$. En l'occurrence, la droite $y = u$.

Utilisation d'échelles logarithmiques

- Lorsque les variations de y sont très petites devant x, on a intérêt à utiliser une échelle logarithmique en x.

  Exemple : $y = ln(x)$. Si on prend pour x une échelle logarithmique, on représente en fait la courbe $y = f(u)$ où $u = ln(x)$. En l'occurrence, la droite $y = u$.

- Lorsque les variations de y sont très grandes devant x, on utilise une échelle logarithmique en y.

  Exemple : lorsque y varie exponentiellement en fonction de x, on représente la fonction $z = f(x)$ où $z = ln(y)$.

Utilisation d'échelles logarithmiques

- Lorsque les variations de y sont très petites devant x, on a intérêt à utiliser une échelle logarithmique en x.

  Exemple : $y = ln(x)$. Si on prend pour x une échelle logarithmique, on représente en fait la courbe

  $y = f(u)$ où $u = ln(x)$. En l'occurrence, la droite $y = u$.

- Lorsque les variations de y sont très grandes devant x, on utilise une échelle logarithmique en y.

  Exemple : lorsque y varie exponentiellement en fonction de x, on représente la fonction $z = f(x)$ où

  $z = ln(y)$.

- Lorsque l'on veut parcourir un domaine de valeurs très étendu, on utilise une échelle logarithmique à la fois en x et en y.

Comment le faire ? On introduit un argument logflag dans la fonction plot2d. Par exemple :

plot2d(x,y,logflag='ln')

Les variantes sont 'nn', par défaut, 'ln', 'nl', 'll'

Exemple

Testons ce qui précède pour le point $x_0 = 1$ et la fonction

$$f : x \mapsto \sin x$$

dont on connaît la dérivée $\cos 1$. On peut donc évaluer l'erreur commise en comparant la valeur obtenue par la formule et la valeur de $\cos 1$ (*valeur calculée par Scilab, donc approchée à* 10^{-16} *près*).
On trace les graphes des fonctions, pour $10^{-5} < h < 1$

$$h \mapsto \frac{\sin(1+h) - \sin 1}{h} - \cos 1$$

$$h \mapsto \frac{\sin(1+h) - \sin(1-h)}{2h} - \cos 1$$

Intervention des erreurs d'arrondi

On ne peut augmenter indéfiniment la précision ! !

On peut envisager, dans l'exemple précédent de calcul de dérivée, de prendre des valeurs de h plus petites pour améliorer la précision.

Intervention des erreurs d'arrondi

On ne peut augmenter indéfiniment la précision ! !

On peut envisager, dans l'exemple précédent de calcul de dérivée, de prendre des valeurs de h plus petites pour améliorer la précision.

Mais, le calcul et le tracé (des erreurs observées) réservent alors une mauvaise surprise due aux erreurs d'arrondis.

Intervention des erreurs d'arrondi

On ne peut augmenter indéfiniment la précision ! !

On peut envisager, dans l'exemple précédent de calcul de dérivée, de prendre des valeurs de h plus petites pour améliorer la précision.

Mais, le calcul et le tracé (des erreurs observées) réservent alors une mauvaise surprise due aux erreurs d'arrondis.

Estimant l'erreur d'arrondi à 10^{-16} sur le numérateur, donc $10^{-16}/h$ sur le quotient, on peut aussi faire le tracé des erreurs théoriques :

Intervention des erreurs d'arrondi

On ne peut augmenter indéfiniment la précision ! !

On peut envisager, dans l'exemple précédent de calcul de dérivée, de prendre des valeurs de h plus petites pour améliorer la précision.

Mais, le calcul et le tracé (des erreurs observées) réservent alors une mauvaise surprise due aux erreurs d'arrondis.

Estimant l'erreur d'arrondi à 10^{-16} sur le numérateur, donc $10^{-16}/h$ sur le quotient, on peut aussi faire le tracé des erreurs théoriques :

$$\text{pour } (*),\ err_1(h) = \frac{h\sin(1)}{2} + \frac{10^{-16}}{h}$$

$$\text{pour } (**),\ err_2(h) = \frac{h^2\cos(1)}{6} + \frac{10^{-16}}{h}$$