Université d'Angers
MPCIE L2
Année 2011-2012

TP Scilab n° 6

On se place dans le cadre d'une équation différentielle écrite sous la forme normale

$$y' = f(t, y).$$

Remarque : on pourra, si nécessaire, utiliser les fonctions Scilab `champ()` et `ode()` dont on peut consulter l'aide.

Ex. 0 Ecrire une fonction Scilab `dess_champ(t0,t1,y0,y1,n,f)` prenant en argument les bornes d'abcisses t_0, t_1, les bornes d'ordonnées y_0, y_1, un entier n et une fonction f et dessinant le champ de vecteurs (tangentes) associé à l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ sur le pavé $[t_0, t_1] \times [y_0, y_1]$ contenant $n \times n$ points régulièrement espacés.

Ex. 1 On se propose d'étudier l'évolution d'une population animale en fonction du temps.

(1) Dans un premier temps, on considère que les nombres de naissances et de morts sont tous deux proportionnels à la population. Ce qui signifie que l'évolution de la population en fonction du temps $y(t)$ suit une équation différentielle du type $y' = ay$ où $a > 0$.
Tracer le champ de vecteurs correspondant (On prendra garde de ne pas tracer trop de vecteurs, sinon on ne voit plus rien, et éventuellement, d'étudier différentes zones). En déduire l'allure des courbes intégrales. Tracer les courbes intégrales sur la même figure. Faire varier a (par exemple, $a \to 0$) et refaire des tracés.

(2) On suppose maintenant que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au carré de y (croissance explosive) ; l'équation devient alors $y' = ay^2$. Représenter de même le champ de vecteur, tracer les courbes intégrales (après avoir résolu l'équation). Faire varier a.

(3) L'hypothèse faite en (1), suivant laquelle l'accroissement de la population est proportionnel à la population, est valable tant que la population n'est pas trop élevée. Par contre, la concurrence pour la nourriture aboutit à une diminution de la vitesse d'accroissement quand la population augmente, ce qu'on traduit par une modification de l'équation différentielle : $y' = a(1 - y)y$. Dessiner la champ de vecteurs associé et donner l'allure des courbes intégrales. Discuter suivant les conditions initiales l'avenir de la population étudiée.

(4) On peut affiner l'étude en supposant qu'un prédateur (l'homme par exemple) prélève chaque année un quota fixe, ce qui conduit à une équation de la forme $y' = a(1-y)y-q$. Mêmes questions que ci-dessus.

Ex. 2 On se propose d'étudier les solutions de l'équation (E) $xy' + 2y = \frac{x^2}{1+x^2}$. On veut pouvoir "visualiser", à la fin de l'exercice, tous les types de courbes intégrales, les positionner correctement, faire les études aux bornes nécessaires, les recherches de points singuliers, etc...

a) Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est une solution de (E), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors la fonction g définie par $g(x) = f(-x)$ est une solution de (E), définie sur l'intervalle opposé de I (rappelons d'ailleurs qu'une solution est toujours un *couple* I, f, I intervalle sur lequel f est définie).

b) Tracer le champ de vecteurs correspondant, tracer l'ensemble Γ des points (x_0, y_0) tels que la solution passant par ce point y ait un extremum. Tracer d'autres isoclines.

c) Intégrer (E) et tracer les courbes intégrales. Comparer graphiquement les courbes obtenues par intégration avec celles obtenues par utilisation de la fonction Scilab `ode()`.

d) Que se passe-t-il en 0 ? Peut-on prolonger une solution de sorte qu'elle passe par 0 ? Faire un dessin précis, sur feuille, de chacun des types de courbe intégrale de (E).

Ex. 3 Reprenant l'exemple $y' = y$, on se propose de calculer des solutions approchées par la méthode d'Euler et de comparer à la solution exacte trouvée.

a) Ecrire une fonction `M=euler(t_0,y_0,t_f,n,f)` qui renvoie la matrice M composé du vecteur T des abcisses et du vecteur Y des ordonnées du polygone d'Euler sur l'intervalle $[t0, tf]$ avec n pas pour l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ et la condition initiale $y(t_0) = y_0$.
Tracer sur un même graphique, la solution exacte sur $[0, 5]$ ainsi que le polygone d'Euler avec diverses valeurs de n.

b) Ecrire de même une fonction `[T,Y]=milieu(t0,y0,tf,n,f)` qui renvoie le vecteur T des abcisses et le vecteur Y des ordonnées obtenues avec la méthode du point milieu sur l'intervale $[t0, tf]$ avec n pas pour l'equations différentielle $y' = f(t, y)$ et la contion initiale $y(0) = y0$.
Tracer sur un même graphique, la solution exacte sur $[0, 5]$ ainsi que le polygone associe à la méthode du point milieu avec diverses valeurs de n.

c) Ecrire une fonction `[T,Y]=erreur_euler(N)` qui calcule pour tout n de 1 à N la différence $E(n)$ entre la solution exacte et la solution approchée en 5 puis représenter son évolution en fonction de n.

Ex. 4 Tracer le champ de vecteurs correspondant à l'équation différentielle suivante : $y' = x - y^2$. Utiliser la fonction scilab `ode()` (voir l'aide pour les paramètres) pour réaliser le tracé des courbes intégrales sur le même dessin. Comparer avec la méthode d'Euler sur l'intervalle $[0, 3]$ prenant la valeur $y0$ en 0 avec un nombre n de pas : pour cela construire une fonction Scilab `euler(y0,n)` qui prend en argument la valeur initiale $y(0) = y0$ et un pas n.

Ex. 5 On va essayer maintenant la fonction `[T,Y]=milieu(t0,y0,tf,n,f)` avec d'abord, $f(x, y) = x - y^2$; comparer avec Euler et `ode()`. Puis avec la fonction

$$f(t, y) = \frac{3y}{t} - \frac{5}{t^3}$$

qui donne de très mauvais résultats dans la cas de la méthode d'Euler. Là encore, comparer avec Euler et la fonction Scilab `ode()` (la méthode utilisée dans la fonction `ode()` est, en fait, basée sur une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 améliorée).

Ex. 6 Systèmes différentiels. Vous avez vu, au 1er semestre, en algèbre, la résolution de systèmes différentiels linéaires (et aussi d'équations différentielles d'ordre > 1 qu'on ramène à des systèmes). On se propose de procéder de la même manière que pour les équations précédentes : ainsi, comme dans l'exercice 2, tracer les champs de vecteurs correspondants et utiliser la fonction `ode()` pour tracer les courbes intégrales dans le cas des systèmes différentiels linéaires du type $Y' = AY + B$:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = 0$.

Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = 0$.

Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = 0$.

Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$, B la matice colonne $(1, e^t)$.