Université d'Angers
MPCIE L2
Année 2011-2012

TP Scilab no 5

But du TP : on se propose de programmer les différentes méthodes vues en cours de calcul approché d'une intégrale : rectangle à gauche et à droite, milieux, trapèzes, Simpson.

Exercice 0 Définir une fonction Scilab `graphe(f,a,b)` (prenant en arguments une fonction f et deux réels a, b) dessinant le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

On propose une première fonction cobaye $t \mapsto f_1(t) = \frac{\ln(1+t)}{t^3+2}$. Définir la fonction f_1 et tracer son graphe sur $[0, 5]$ à l'aide de la fonction `graphe`.

Exercice 1 Ecrire des fonctions `dessRectg(f,a,b,n)`, `dessRectd(f,a,b,n)`, `dessMilieu(f,a,b,n)`, `dessTrap(f,a,b,n)` (prenant en arguments une fonction f, deux réels a, b et un entier n) qui font le dessin, respectivement, de la méthode des rectangles à gauche, des rectangles à droite, des points milieux, et enfin des trapèzes, avec une subdivision du segment $[a, b]$ en n parties égales. On souhaite voir aussi à la fois les rectangles ou trapèzes (suivant la méthode choisie) et le graphe de f (on pourrra utiliser au besoin les fonctions `plot2d2` et `plot2d3`).

Exercice 2 Ecrire des fonctions `rectg(f,a,b,n)`, `rectd(f,a,b,n)`, `milieu(f,a,b,n)`, `trapeze(f,a,b,n)` (prenant pour arguments une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, les extrémités $a < b$ de l'intervalle d'intégration et un entier n) calculant une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$, en appliquant les différentes méthodes (rectangles à gauche et à droite, milieux, trapèzes) à f avec une subdivision de n parties égales. Appliquer à des fonctions de votre choix dont on sait calculer une primitive.

Exercice 3 Ecrire une fonction `erreurs(f,a,b,n,I)` prenant en argument une fonction f, deux réels a, b,un entier n, une valeur exacte d'integrale I et retournant sous forme de vecteur les erreurs commises $I - I_n$ lorsqu'on utilise chacune des 4 méthodes d'intégration ci-dessus pour calculer une valeur approchée I_n de $I = \int_a^b f(t)dt$ avec une subdivision de n parties égales.
On considère la fonction $t \mapsto f_2(t) = t^2$ sur l'intervale $[0, 1]$. Utiliser `erreurs(f,a,b,n,I)` pour trouver la méthode qui donne pour f_2 la meilleure précision à n égal.
Ecrire ensuite une fonction `graphe_erreurs(f,a,b,n,I)` qui trace, sur un même graphe, avec des couleurs différentes, les courbes représentant $n \mapsto E_n = |I - I_n|$, $1 \leq N$, pour chacune des méthodes (attention au choix d'échelle).

Exercice 4 On présume que dans les méthodes précédentes l'erreur $E_n = |I - I_n|$ se comporte comme du C/n^a où $C, a > 0$. On veut pour chacune une estimation de l'exposant a. Ecrire une fonction `taux(f,a,b,n,I)` qui, dans chacun des cas précédents, pour la fonction f calcule et trace le taux de décroissance logarithmique de l'erreur commise (i.e. $(\ln(E_{k+1}) - \ln(E_k))/(\ln(k+1) - \ln(k)))$ pour $1 \leq k \leq n$. En déduire la valeur présumée de a pour les 4 méthodes précédentes.

Exercice 5 Ecrire une fonction `simpson(f,a,b,n)` qui calcule une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ par la méthode de Simpson.
Tester sur la fonction f_2. Que constate-t-on ?
Puis sur la fonction $t \mapsto f_3(t) = \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[1, 2]$. Quelle est la valeur exacte attendue de l'intégrale ?
Modifier la fonction `erreurs(f,a,b,n,I)` pour y ajouter la méthode de Simpson. Tracer le graphe des erreurs pour la fonction f_3 ainsi que le calcul du taux. Que constate-t-on ?

Exercice 6 On regarde maintenant la fonction $t \mapsto f_4(t) = \sqrt{1 - t^2}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.
Quelle est la valeur exacte de l'intégrale ?

Que donne l'étude des erreurs pour f_4 ?
Cela vous paraît-il normal ? Sinon avez-vous une explication ? Changer la distribution des intervalles pour améliorer le résultat (cela signifie réécrire une fonction avec une autre distribution).

Exercice 7 Obtention d'une précision fixée a priori. L'étude théorique des méthodes d'intégration numérique fait intervenir une constante M (en général, une majoration d'une des dérivées $f', f", \ldots$ sur l'intervalle $[a, b]$). Evidemment, on ne connaît pas, en général, une telle majoration.

Etant donnée une précision h, on veut, pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, trouver une valeur numérique J qui diffère de la valeur inconnue $I = \int_a^b f(t)dt$ d'une valeur de l'ordre de h au maximum. Pour cela, on va calculer `y=milieu(a,b,f,n)` pour les valeurs successives $1, 2, 4, \ldots, 2^k, \ldots$ et poursuivre le calcul tant que les valeurs successives diffèrent de plus de h. On prend alors pour J la dernière valeur calculée (Attention, rien ne garantit que ce procédé donne effectivement la valeur exacte de I à h près)).

Ecrire, en utilisant la fonction `milieu`, une fonction `J=integ(a,b,f,h)` qui réalise ce programme.