Université d'Angers
MPCIE L2
Année 2011-2012

TP Scilab n° 4

On considère l'intervalle $I = [0,1]$ et la fonction logistique $f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto 4x(1-x)$. Pour tout réel c compris entre 0 et 1, on regarde la fonction f_c définie à partir de f par $f_c(x) = cf(x)$.

Le but de ce TP est d'étudier pour différentes valeurs du paramètre c la suite $u^c = (u_n^c)$ définie par récurrence par :

$$u_0^c = 1/5 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, u_{n+1}^c = f_c(u_n^c).$$

(1) Ecrire une fonction Scilab `f(x)`, prenant un réel x en argument et rendant $f(x)$

(2) Etudier sur papier pour c entre 0 et 1, les variations de la fonction $x \mapsto f_c(x)$ et donner ses bornes. En déduire que $x \in I$ implique $f_c(x) \in I$ et, par conséquent que toutes les valeurs u_n^c de la suite appartiennent à I.

(3) Ecrire une fonction Scilab `valeurs(x,c)`, prenant comme argument un vecteur d'abcisse $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et un vecteur de paramètres $c = (c_1, \ldots, c_k)$ et rendant la matrice Y de taille $n \times k$ telle que $Y_{i,j} = f_{c_j}(x_i)$. Cette fonction permettra de faire tracer simultanément les courbes représentatives de $f_{c_1}, \ldots, f_{c_{10}}$.

(4) Ecrire une fonction `graphes()` ne prenant pas d'argument et rendant pour seul résultat le dessin, dans un même repère, des graphes sur l'intervalle I, des fonctions $f_{c_1}, \ldots, f_{c_{10}}$, avec $c_k = k/10$, ainsi que de la fonction $x \mapsto x$.

(5) Préciser par une étude sur papier le nombre et la valeur des points fixes de f_c (i.e. les x tels que $f_c(x) = x$) sur I suivant la valeur de c.

(6) Ecrire une fonction Scilab `iteres(x,g,n)`, prenant en arguments un réel x, une fonction g et un entier n, et rendant le vecteur u de dimension $n+1$ contenant les valeurs de la suite : $u = (x, g(x), g^2(x), \ldots, g^n(x))$.

(7) Ecrire une fonction `suite(c,n)` prenant en argument un réel $0 \leq c \leq 1$ et un entier positif n, et traçant la représentation graphique des points (k, u_k^c) pour k variant de 0 à n (on rappelle que $u_k^c = f_c^k(1/5)$).

En appliquant la fonction `suite` à différentes valeurs de c choisies de façon adéquate entre 0 et 1, décrire le comportement des suites u^c en fonction de c. Quel est le lien avec les points fixes de f_c ?

(8) Pour représenter graphiquement une suite $(u_n)_n$ définie par un premier terme et une relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$, on va représenter sur un même diagramme le graphe de h, celui de la fonction $x \mapsto x$ et la suite de points $A_0 = (u_0, u_1), A_1 = (u_1, u_1), A_2 = (u_1, u_2), A_3 = (u_2, u_2), \ldots, A_{2n-2} = (u_{n-1}, u_n), A_{2n-1} = (u_n u_n)$ reliés par des segments qu'on appelle un "colimaçon". Pour construire ce "colimaçon", on va procéder par étapes.

(a) Ecrire une fonction scilab `abscisses(u)` prenant en argument le vecteur $u = (u_0, \ldots, u_n)$ et rendant la liste $(u_0, u_1, u_1, u_2, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_{n-1}, u_n)$ de longueur $2n$ des abscisses des points A_i.

(b) Ecrire de même une fonction `ordonnees(u)` prenant en argument le vecteur $u = (u_0, \ldots, u_n)$ et rendant la liste $(u_1, u_1, u_2, u_2, \ldots, u_n, u_n)$ des ordonnées des points A_i.

(c) En utilisant les 2 fonctions précédentes, écrire une fonction Scilab `colimacon(c,n)` qui prend en paramètre la valeur c et l'entier positif n et qui affiche, dans une même fenêtre, les graphes de la fonction f_c, de la fonction $x \mapsto x$, ainsi que le colimaçon obtenu en partant de $u_0 = 1/5$, en traçant les segments reliant les points par les n premiers points de la suite (u_n). Exécuter cette fonction. Que voyez-vous ?

(9) Pour différentes valeurs de c, à l'aide de la fonction précédente, faire afficher le colimaçon produit par les 50 premiers points de la suite (u_n^c) et observer son comportement asymptotique (c'est à dire à l'infini). Comparez avec les observations faites au (7).

(10) On prend ici $c = 0,4$. On voudrait regarder la vitesse de convergence de la suite u^c. Proposer et effectuer un dessin, qui montre graphiquement que $|u_{n+1}^c - u_n^c|$ est équivalent quand $n \to \infty$ à un terme du type $\alpha.a^{-n}$. Utilisez Scilab pour donner une estimation grossière de a.

(11) Ecrire un fichier de commande `colimacon.sce` qui demande à l'utilisateur d'entrer le paramètre c et qui affiche dans une même fenêtre les graphes de la fonction f_c, de la fonction $x \mapsto x$, ainsi que le colimaçon produit par les 50 premiers points de la suite u_n^c. Exécuter la commande ci-dessus sur différentes valeurs de c.

(12) (dessin de Feigenbaum) On se propose de représenter dans un diagramme l'ensemble de points (c, u_n^c) où c parcourt l'intervalle $[0, 1]$ et n est compris entre 100 et 200. On demandera à Scilab de ne pas relier les points par des segments (prendre par exemple le choix de style "0"). On distinguera dans le diagramme différentes zones qu'on essaiera d'interpréter.

Pour aller un peu plus loin dans la compréhension de ce qui précède, on étudiera les sous-suites extraites obtenues comme $v_{n+1}^c = f_c^2(v_n^c)$ ou $w_{n+1}^c = f_c^4(w_n^c)$.

(13) Ecrire une fonction Scilab `graphes2(c)` prenant comme argument un réel $0 \leq c \leq 1$ et rendant le dessin, dans un même diagramme des graphes de $x \mapsto x$, de f_c, de $f_c^2 = f_c \circ f_c$ et de f_c^4.

(14) A l'aide de tous les outils dont vous disposez, étudiez le comportement d'une suite u_c selon la zone dans laquelle se trouve c. On se contentera des 2,3 zones les plus à gauche sur le dessin de Feigenbaum.