Université d'Angers
MPCIE L2
Année 2014-2015

TP Scilab no 3

Exercice 1. Propagation d'une erreur. On veut écrire les fonctions et expliciter l'exemple du cours. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln|x|$ et on s'intéresse au calcul de $f^k(2)$.

— Définir la fonction f et faire tracer son graphe sur son ensemble de définition

— Ecrire une fonction `iterees(x,k)`, prenant en argument un nombre x et un entier k et rendant le vecteur $\big(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{k-1}(x), f^k(x)\big)$.

— Faire tracer sur un même dessin les graphes des suites $k \mapsto f^k(2)$ et $k \mapsto f^k(2+10^{-6})$, pour k variant de 0 à 50.

— On cherche à visualiser quelle erreur relative on commet quand on remplace 2 par $2+10^{-6}$ dans le calcul des itérées successives de $f(2)$. Faire tracer le graphe de la suite

$$k \mapsto \frac{|f^k(2+10^{-6}) - f^k(2)|}{f^k(2)}$$

Il pourra être intéressant de représenter les ordonnées en coordonnées logarithmiques.

— Le graphe qu'on vient d'afficher montre que le calcul des itérées successives devient instable si k devient trop grand. Pour mieux comprendre le phénomène, on pose $F_k = f \circ \ldots \circ f$ (k fois).

  — Calculer sur votre feuille la dérivée de F_k pour tout k (négliger les points où $|F_k|$ n'est pas définie).

  — Faire dessiner le graphe de $k \mapsto F_k'(2)$, pour k variant de 0 à 50, en utilisant des coordonnées adéquates.

Exercice 2. Dérivation numérique. On veut expérimenter ce qui a été affirmé sur ce sujet dans la partie cours. On prend $f : x \mapsto \sin x$ et $x_0 = 1$.

— Graphes en coordonnées logarithmiques : on veut tracer le graphe d'une fonction g en coordonnées logarithmiques sur un intervalle du genre $[10^{-15}, 1]$.

  — Ecrire une fonction `abscisse(n)` prenant en argument un entier n et rendant le vecteur $(1, 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots, 2^{-n})$.

  — Ecrire une fonction `echantillon(g,n)` prenant en argument une fonction g et un entier n et rendant le vecteur $\big(g(1), g(2^{-1}), \ldots, g(2^{-n+1}), g(2^{-n})\big)$.

  — Ecrire une fonction `graphe(g,n,c)` prenant en argument une fonction g, un entier n et un numéro de couleur c, et traçant le graphe de g en coordonnées logarithmiques sur l'intervalle $[2^{-n}, 1]$ en utilisant les abscisses données par la fonction `abscisse(n)` avec la couleur n° c.

  — Quel est l'intéret d'une telle représentation en coordonnées logarithmiques ?

  — Pourquoi vous a-t-on incité à prendre un échantillon d'une forme un peu particulière plutôt qu'un `linspace` ?

— Utiliser les fonctions précédentes pour étudier les graphes des erreurs effectives

$$g_1 : h \mapsto \left|\frac{\sin(1+h) - sin(1)}{h} - \cos(1)\right| \qquad \text{et} \qquad g_2 : h \mapsto \left|\frac{\sin(1+h) - sin(1-h)}{2h} - \cos(1)\right|$$

ainsi que des erreurs théoriques

$$g_3 : h \mapsto \sin(1)h/2 + 10^{-16}/h \qquad \text{et} \qquad g_4 : h \mapsto \cos(1)h^2/6 + 10^{-16}/h$$

— On veut améliorer l'algorithme (**) donné dans la partie cours. Pour cela, on note que

$$\Phi(h) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}h^2 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{120}h^4 + o(h^4)$$

Regarder alors quel est le comportement de $\Psi(h) = 1/3(4\Phi(h) - \Phi(2h))$ quand $h \to 0$. En déduire une nouvelle formule (***) pour calculer $f'(x_0)$.

— Faire tracer les courbes d'erreur effective et d'erreur théorique quand on utilise la méthode (***) pour le calcul de la dérivée de sin au point 1.

— Quelles précisions peut-on atteindre quand on utilise chacune des trois méthodes (*), (**) et (***) ?
— Voyez vous une façon d'améliorer encore l'efficacité de la méthode (***) ?