

Introduction à Scilab — Examen

7 mai 2015 — 13:30-16:30

Seuls le petit mémento Scilab et Scilab II sont autorisés. Tout autre document électronique ou manuscrit est interdit. Les réponses aux questions mathématiques devront être rédigées sur la copie papier.

Pour être prises en compte, les réponses aux questions devront être numérotées à la fois sur la copie papier et dans le fichier (à l'aide de commentaires).

- Dans les salles **I008** et **I109**, à la fin de la séance, on rendra le fichier réalisé, par exemple `exam2015.sce`, en tapant dans une fenêtre de terminal la commande

```
enregistrer exam2015.sce naie
```

- Dans les salles **G101-2-3-4**, vous ouvrirez en début de séance un fichier nommé `nom-prenom.sce` dans lequel vous enregistrerez le code et les fonctions SCILAB demandées. En fin de séance, enregistrez la dernière version de votre fichier sur le disque D et ne pas éteindre votre poste.

Exercice 1. (12 pts). Le but de cet exercice est de mettre en application les méthodes numériques (plus précisément la méthode d'Euler) vues en cours cette année pour l'équation différentielle ordinaire (E) suivante,

$$y' + \sin(t).y = \frac{\sin(t)}{2} \quad (\text{E})$$

et de voir comment la méthode d'Euler se comporte pour approcher les solutions de (E).

- 1) **Un peu de théorie — (2 pts)** Montrer que les solutions de (E) sont de la forme :

$$y(t) = \frac{1}{2} + Ke^{\cos(t)} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

2) On va maintenant utiliser **Scilab** pour étudier numériquement (E) et ses solutions. Le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle (E) est la fonction qui associe à chaque point (t, y) du plan, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ (\frac{1}{2} - y) \sin t \end{pmatrix}$.

- (a) **(2 pts)** Écrire une fonction `dess_champ(t_min, t_max, y_min, y_max, nb_vect)` prenant en argument les bornes d'abscisses `t_min` et `t_max`, les bornes d'ordonnées `y_min` et `y_max`, un entier positif `nb_vect` et dessinant le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle (E) sur le pavé $[t_min, t_max] \times [y_min, y_max]$ et possédant `nb_vect`² vecteurs. On pourra pour cela utiliser la fonction `champ()` de **Scilab**.
- (b) **(1 pts)** Utiliser les questions précédentes pour créer une fonction **Scilab** qui affiche le champ de vecteur et les deux courbes intégrales de l'équation (E) correspondant à $K = -1.3$ et $K = 2.2$ dans le rectangle $[0, 16] \times [-4.4, 7]$ en prenant `nb_vect = 16`.

(c) **(0,5 pts)** En regardant le résultat, que peut-on dire sur l'évolution des solutions en générales ?

(d) **(0,5 pts)** Y a-t-il une solution spéciale qu'on identifie facilement ?

3) **Méthode d'Euler**

(a) **(1 pts)** Donner la relation de récurrence reliant les ordonnées du polygone d'Euler.

(b) **(1 pts)** Écrire une fonction `euler(t_ini,y_ini,t_fin,nb_pas)` qui renvoie, pour l'équation différentielle (E) et la condition initiale $y(t_ini) = y_ini$, le vecteur des ordonnées du polygone d'Euler sur l'intervalle $[t_ini, t_fin]$ avec le nombre de pas `nb_pas`.

4) On veut à présent voir si la méthode d'Euler peut nous permettre d'approcher efficacement une courbe intégrale solution de (E).

(a) **(1 pts)** Écrire une fonction `compare_euler(t_fin,K,nb_pas)` qui affiche en rouge la courbe de la solution exacte de (E)

$$y_K(t) = \frac{1}{2} + Ke^{\cos(t)}$$

et en vert la courbe de la solution approchée par la méthode d'Euler pour `nb_pas` pas pour la même condition initiale que y_K sur l'intervalle de temps $[0, t_fin]$.

(b) **(1 pts)** Pour `K` et `t_fin` fixés (par exemple `K=1` et `t_fin=40`), comparer la solution exacte et la solution approchée pour différentes valeurs de `nb_pas`. Que constatez-vous ? Comment pouvez-vous l'expliquer ?

5) **(2 pts)** Représenter sur un même graphique en rouge la solution exacte de (E), en vert celle donnée par la méthode d'Euler et en orange celle donnée par la fonction `ode` de **Scilab** pour $y(0) = 6$, pour $t \in [0, 20]$ avec `nb_pas=100`.

Exercice 2. (10,5 pts). Cet exercice est composé de deux parties indépendantes. Son but est de vérifier une identité, due à Gauss, faisant apparaître deux nombres, calculés chacun, dans une des parties.

1) On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

où $a_0 \geq b_0 > 0$.

(a) **(0,5 pts)** Montrer que pour tout n , $a_n \geq b_n$.

(b) **(0,5 pts)** Montrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante, que la suite $(b_n)_n$ est croissante.

(c) **(0,5 pts)** Montrer que pour tout n , $a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$.

(d) **(1 pts)** En déduire que les deux suites sont adjacentes. Leur limite commune est appelée la *moyenne arithmétique-géométrique* et est notée par $M(a_0, b_0)$.

(e) **(1 pts)** Écrire un programme en **Scilab** qui calcule une valeur approchée $M(\sqrt{2}, 1)$ à 10^{-6} près.

(f) **(1 pts)** Après combien d'itérations obtient-on cette approximation ? Écrire les résultats sur la copie.

2)

(a) **(2 pts)** Écrire un programme `intNum_pointMilieu(f,a,b,N)` en Scilab qui calcule une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ en utilisant la méthode du *point milieu* avec une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles de même longueur.

(b) **(1 pts)** On considère l'intégrale

$$\omega = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)(1-x^2)}}.$$

Par un changement de variables, montrer que

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)(1-x^2)}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2-\sin^2 t}}.$$

(c) **(0,5 pts)** conclure que ω est convergente.

(d) **(0,5 pts)** En utilisant l'égalité $\omega = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)(1-x^2)}}$, faire quelques tests en utilisant différentes valeurs de N . Pouvez vous déterminer ω à 10^{-6} près? Si c'est possible, donner un N pour lequel on obtient cette approximation. Écrire les résultats sur la copie.

(e) **(0,5 pts)** En utilisant l'égalité $\omega = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2-\sin^2 t}}$, faire quelques tests en utilisant différentes valeurs de N . Pouvez vous déterminer ω à 10^{-6} près? Si c'est possible, donner un N pour lequel on obtient cette approximation. Écrire les résultats sur la copie.

(f) **(1 pts)** En déduire quelle est la meilleure expression intégrale pour calculer numériquement ω . Pourquoi ?

3) **(0,5 pts)** Vérifier l'identité $M(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{\omega}$.