Corrigé Scilab Mai 2014 : papier

Exercice 1

1/ (E) $y' + (\sin t)\, y = \frac{\sin t}{2}$

$y = \frac{1}{2}$ solution particulière de (E)

$y' + \sin t \, y = 0 \qquad \frac{y'}{y} = -\sin t$

$\ln y = \cos t \qquad y = e^{\cos t}$

donc les solutions de l'équation homogène sont $y = K e^{\cos t}$

et donc les solutions de (E) sont $K e^{\cos t} + \frac{1}{2}$

2/ c/ Les solutions sont parallèles.

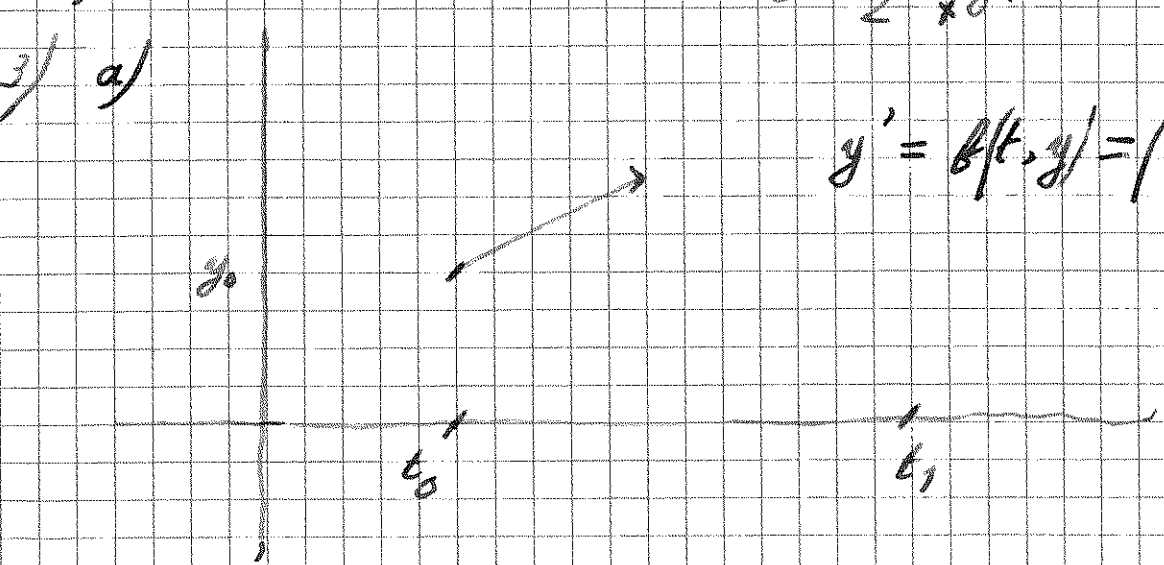
Pour $K > 0$, elles sont au dessus de $y = \frac{1}{2}$

Pour $K < 0$ dessous

d/ La solution cherchée $y = \frac{1}{2} + y_1$

3/ a/

$y' = f(t, y) = \left(\frac{1}{2} - y\right) \sin t$



$$y_1 - y_0 = y_0' (t_1 - t_0)$$

$$y_0' = f(t_0, y_0)$$

$$y_1 = y_0 + (t_1 - t_0) f(t_0, y_0)$$

$i = 0, 1, \ldots$ nbpas $- 1$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{t_{fin} - t_{ini}}{nb\text{-}pas} f(t_i, y_i)$$

---

4 a) $y_ini = \frac{1}{2} + K e^{-0}$

4 b) Plus nb-pas est grand, plus la solution approchée se rapproche de la solution exacte

Plus nb-pas est grand, plus la valeur $[t_i, t_{i+1}]$ est petite et donc meilleur est l'approximation $y_{i+1} - y_i = y_i' (t_{i+1} - t_i)$ dans la méthode d'Euler

5) $y(0) = \frac{1}{2} + K e^{1} = 6$

donc $K = 5,5 / e$

la courbe donnée par ode coincide avec celle donnée par la solution exacte

Exercice 2

a) $a_0 - b_0 \geq 0$

$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n})$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \geq 0$ pour tout $n \geq 0$

b)

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \geq 0$ d'après a)

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \geq 1$ d'après a)

c) $\frac{1}{2}(a_n - b_n) = a_{n+1} + b_{n+1}$

$= \frac{1}{2}(a_n - b_n - a_n - b_n + 2\sqrt{a_n b_n})$

$= \sqrt{a_n b_n} - b_n = b_{n+1} - b_n \geq 0$ d'après b)

d) Par raisonnement immédiat

$\forall n \quad 0 \leq a_n - b_n \leq \frac{1}{2^n}(a_0 - b_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\lim a_n - b_n = 0$

donc les suites sont adjacentes.

c) β) Soit n tel que $\frac{1}{2^n}(\sqrt{2}-1) \leq 10^{-6}$

c'est à dire $2^n \geq 10^6 (\sqrt{2}-1)$

$\Leftrightarrow e^{n \ln 2} \geq e^{6 \ln 10 + \ln(\sqrt{2}-1)}$

$\Leftrightarrow n \ln 2 \geq 6 \ln 10 + \ln(\sqrt{2}-1)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{6 \ln 10 + \ln(\sqrt{2}-1)}{\ln 2} \simeq 18{,}66$

$a_3 - b_3 \simeq 1{,}16 \cdot 10^{-16}$

donc en pratique $n = 3$ suffit 3 itérations

$a_3 = 1{,}1981402$

2 α) $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)(1-x^2)}}$$

intégrale généralisée ! $x = \sin t$ $dx = \cos t\, dt$

Si t varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, x varie entre 1 et -1

donc $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)(1-x^2)}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{(2-\sin^2 t)(1-\sin^2 t)}}$$

c) l'intégrale généralisée est égale à l'intégrale en un segment d'une fonction continue donc est convergente

Plus · mouvement pour tout $A, B \in]-1,1[$

$$\int_0^B \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)(1-x^2)}} = \int_0^{\text{Arcsin } B} \frac{dt}{\sqrt{(2-\sin^2 t)}} \xrightarrow{B \to 1} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{2-\sin^2 t}}$$

$$\int_A^0 \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)(1-x^2)}} = \int_{\text{Arcsin } A}^0 \frac{dt}{\sqrt{2-\sin^2 t}} \xrightarrow{A \to -1^+} \int_{-\pi/2}^0 \frac{dt}{\sqrt{2-\sin^2 t}}$$

on appelle $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{2-\sin^2 t}}$ est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{2-\sin^2 t}}$ sur $\mathbb{R}$

donc est dérivable et en particulier continue sur $\mathbb{R}$ donc continue à gauche en $\pi/2$ —

d/ Nous, car avec $N = 500\,000$, on n'arrive pas à calculer w à 10^{-4} près. Le programme

e/ $N = 15$ permet de calculer w à 10^{-6} près
$w = 2,6220576$ le programme

f/ $w = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{2-\sin^2 t}}$ est la meilleure expression

Car l'autre intégrale est une intégrale généralisée :

$$\lim_{\substack{x \to 1^- \\ \text{ou } -1^+}} \frac{1}{\sqrt{(2-x^2)(1-x^2)}} = +\infty$$