Université d'Angers – Mathématiques – L2 MPCIE Scilab 2013-2014

Examen partiel

19 Février 2014 – Durée : 2 heures

Modalités : *seul le mémento Scilab est autorisé. Vous ouvrirez en début de séance un fichier nommé* `nom-prenom.sce` *dans lequel vous stockerez le code et les fonctions* Scilab *demandées. En fin de séance, enregistrez la dernière version de votre fichier sur le disque* `D` *et ne pas éteindre votre poste. Dans tous les cas, ne partez pas avant que l'enseignant ait vérifié l'enregistrement de votre fichier. Il est bien sûr vivement recommandé d'enregistrer régulièrement vos fichiers. Le barème est indicatif. Les exercices sont indépendants. Si vous êtes bloqué(e) dans un exercice, traitez le suivant ; passez un temps raisonnable à chercher d'éventuelles erreurs.*

Exercice 1 : [6 points] Chaque question est indépendante de la précédente.

- On rappelle que le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ est donné par la formule $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$ où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne et θ l'angle (que l'on supposera dans $[0, \pi]$) entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ecrivez une fonction `angle(u,v)` qui calcule l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. *Indication* : utilisez la fonction `acosd` et la transposition.
- Soit $M = (M_{i,j})_{1 \le i,j \le m,n}$ une matrice de taille $m \times n$. Ecrivez une fonction `norme(M,alpha)` qui calcule la norme α de M, donnée par la formule :

$$\|M\| = \left(\sum_{1 \le i,j \le m,n} |M_{i,j}|^{\alpha} \right)^{1/\alpha}$$

  Indication : utilisez une double boucle `for` ou bien la fonction `sum`.
- Consultez l'aide Scilab concernant la fonction `diag`. A l'aide de `diag`, écrivez une fonction qui permet de construire la matrice suivante (utile en simulation numérique) carrée de taille n :

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : [7 points] On dispose d'un nuage de points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(x_i, y_i)_{1 \le i \le n}$. On cherche une droite d'équation $y = ax + b$ qui passe au plus près de tous ces points, autrement dit on cherche à minimiser la quantité $\sum_{1 \le i \le n} (y_i - (ax_i + b))^2$ par rapport aux variables a et b. Ce problème est appelé *méthode des moindres carrés* ou *régression linéaire* si l'on interprète le nuage comme une série statistique à deux variables (x et y).

- Etant donné deux vecteurs x et y formant un nuage de points ou une série statistique à deux variables, le *coefficient de corrélation linéaire* r est défini par les formules :

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{\mathrm{Var}x\ \mathrm{Var}y}}, \quad Cov(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad \mathrm{Var}x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2, \quad \mathrm{Var}y = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

  où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ désignent les moyennes arithmétiques des vecteurs x et y, que vous pouvez obtenir dans Scilab à l'aide de la fonction `mean`. Si $|r| > 0,95$ les points sont presque alignés, ou bien on dit que les séries statistiques x et y sont *linéairement corrélées*. Après avoir ré-interprété les formules ci -dessus à l'aide du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, écrivez une fonction `regl` qui prend en arguments les deux vecteurs x et y et renvoie d'une part le coefficient r et un booléen `ok` qui sera de valeur Vrai si $|r| > 0,95$.

- PEARSON a montré que les coefficients a et b de la droite dite de *régression linéaire* sont donnés par les formules :

$$a = \frac{Cov(x,y)}{\mathrm{Var} x}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

  Complétez votre fonction `reglin` afin que dans le cas où $|r| > 0,95$, elle calcule a et b puis affiche le nuage de points à l'aide de l'option `style=-1` de `plot2d`, ainsi que la droite de régression en couleur rouge à l'aide de l'option `style=color("red")` de `plot2d`. Dans le cas contraire, affichez un message disant que la régression a échoué.
- Testez la fonction `reglin` sur les deux séries statistiques suivantes :

x	1,2	2,5	4,3	8,3	11,6
y	6,05	11,6	15,8	21,8	36,8

x	1,2	2,5	4,3	8,3	11,6
y	36,6	134,56	249,64	475,84	1354,24

  La première satisfait $|r| > 0,95$ mais pas la seconde.

Exercice 3 : [7 points] La *dichotomie* est un algorithme simple qui permet de chercher efficacement le zéro d'une fonction continue lorsque l'on en ait assez proche déjà. Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a,b]$, telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (f change de signe). Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$, appelé *zéro* de f. L'algorithme de dichotomie se décrit de la manière suivante :

(1) On part du couple de valeurs (a,b) et on calcule $m = \frac{a+b}{2}$ (le milieu),

(2) Si $f(m) < 0$, on remplace a par m, sinon on remplace b par m,

(3) On recommence avec le nouveau couple (a,b) jusqu'à ce que la différence en valeur absolue de a et b soit plus petite qu'un certain flottant représentant la précision désirée.

- Ecrivez une fonction `dichotomie` qui prend en arguments `f` une fonction (définie par exemple à l'aide de `deff`), `a`, `b` et la précision `prec` et renvoie l'intervalle trouvé contenant le zéro de f ainsi que le nombre d'itérations nécessaires pour y parvenir. *Indication* : utilisez une boucle `while` et maintenez une variable `i` qui est incrémentée de 1 à chaque passage dans la boucle.
- Vous testerez `dichotomie` sur les fonctions $f(x) = 3x + 1$ sur l'intervalle $[-1,0]$ et $f(x) = \ln(x)$ sur l'intervalle $[0,2]$ avec une précision de l'ordre du centième.

FIN