Université d'Angers L2

Série d'exercices n°4. Proba-Stats . 2008-2009

Exercice 1 :

Soit X une v.a. suivant une loi de $\mathcal{P}(3)$.

a) Calculer $P(X=2)$, $P(X=3)$, $P(X \leq 3)$, $P(X > 3)$.

b) Calculer $E(X)$, σ_X.

c) En utilisant l'inégalité de Tchebycheff, donner une majoration de $P(X \geq 500)$.

Exercice 2 :

Soit $[a, b]$ un intervalle et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) = K$$

$$\forall x \notin [a, b] \quad f(x) = 0$$

Déterminer la constante K pour que f soit une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire continue de densité f. Calculer, si elles existent, les valeurs de $E(X)$ puis de $Var(X)$.

Exercice 3 : La durée de vie d'un atome radioactif est une variable aléatoire continue X qui admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- si $t < 0$, $f(t) = 0$
- si $t \geq 0$, $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ où $\lambda > 0$.

1) Calculer la moyenne et la variance de X.

2) On prend t en secondes et $\lambda = 0,2$. Quelle est la probabilité pour qu'un atome ait une durée de vie supérieure à 4 secondes ? Quelle est la probabilité pour qu'un atome ait une durée de vie comprise entre 1 et 3 secondes ?

Exercice 4 :

1) Si Y suit la loi normale $N(4; 2)$, determiner $P(Y \leq 6)$.

2) Si Y suit la loi normale $N(3; 1,5)$, determiner x pour que $P(Y \leq x) = 0,3192$.

3) Si Y suit la loi normale $N(5; 2)$, determiner $P(2,5 \leq Y \leq 6)$.

4) Si Y suit la loi normale $N(6; 2)$, determiner un intervalle, centré sur la moyenne de probabilité 0.9.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{(1-x)^2} & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer la constante réelle k pour que f soit une densité de probabilité.

2) Soit X une v.a. de densité f.

a) Calculer $P(2 \leq X \leq 3), P(X \geq 2.5)$.

b) Déterminer la fonction de répartition de X, F_X.

c) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 6 :

Soit X une v.a. de densité f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -4(x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer la fonction de répartition de X, F_X

2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 7 :

1) On jette une piéce de monnaie 5 fois de suite . On suppose que la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{3}$.

Soit X la v.a égale au nombre de piles obtenus.

a) quelle est la loi de X ?

b) En déduire de a) $P(X=0),\ P(X=1),\ P(X\leq 2),\ \ P(X>2)$.

c) Calculer $E(X),\ \sigma_X$.

d) Soit $Y=2X-\frac{5}{3}$. Calculer $E(Y),\ \sigma_Y$.

2) On jette une piéce de monnaie 500 fois de suite . On suppose que la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{3}$.

Soit X la v.a égal au nombre des piles obtenus.

a) Calculer $P(X\leq 2),\ P(X=50)$.

b) Calculer $P(X\geq 2),\ P(X=50)$,en utilisant les lois de probabilité approximantes.

c) En utilisant l'inégalité de Markov, donner une majoration de $P(X\geq 50)$.

Exercice 8 :

Une population de 1000 individus comporte 950 individus sains et 50 individus malades. On prèleve"au hasard" un échantillon de 10 individus. On note X la v.a. égale au nombre d'individus malades.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Calculer $P(X=2), P(X=3),\ P(X\geq 4)$.

c) Calculer $P(X=2), P(X=3),\ P(X\geq 4)$,en utilisant les lois de probabilité approximantes.