

Exercice 1. Mes voisins ont deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

Exercice 2 : De l'utilité de la formule de Bayes. Dans un élevage de moutons, on décèle 30 pour cent d'animaux malades. La probabilité qu'un mouton qui n'est pas malade ait une réaction négative à un test donné est de 0.9. Par contre, s'il est malade, la réaction sera positive à 80 pour cent. Quel est la probabilité qu'un mouton choisi au hasard, et ayant une réaction positive au test, soit malade ?

Exercice 3 : Le trousseau de clefs. Une personne se trouve devant une porte fermée à clef. Elle dispose d'un trousseau de n clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle essaie les clefs au hasard l'une après l'autre. Quel est la probabilité p_k qu'elle ouvre la porte au k ième essai ? Retrouver le résultat par un raisonnement simple.

N. B. On pourra utiliser, après l'avoir démontré, la formule :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_n/A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Exercice 4. Deux événements de probabilités strictement positives et incompatibles, peuvent-ils être indépendants ?

Exercice 5.

- (1) Soient A, B deux événements indépendants appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que A et $\bar{B}$ sont indépendants, puis que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.
- (2) Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ équiprobable et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. On pose $A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{2, 3\}, A_3 = \{1, 3\}$. Les événements (A_1, A_2, A_3) sont-ils indépendants (2 à 2) ?

Exercice 6.

- (1) Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $b(p)$, $p \in [0, 1]$. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.
- (2) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binômiale $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0, 1]$. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.
- (3) Même question avec X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Exercice 7. Soit $\Omega = \{-1, 0, 1\}$. On considère sur $(\Omega^2, \mathcal{P}(\Omega^2))$ la probabilité P définie par :

$$P((\omega_1, \omega_2)) = \begin{cases} 1/9 & \text{si } \omega_1 = \omega_2, \\ 1/12 & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \text{ et } \omega_1 \omega_2 = 0, \\ 1/6 & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \text{ et } \omega_1 + \omega_2 = 0. \end{cases}$$

- (1) Soit $X_1(\omega_1, \omega_2) = \omega_1, X_2(\omega_1, \omega_2) = \omega_2$. Montrer que X_1 et X_2 sont des v.a. à valeurs dans $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
- (2) Déterminer les lois de X_1 et X_2 , trouver leurs espérances et variances.
- (3) Donner $cov(X_1, X_2) = E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)))$.

Exercice 8 : Variance d'une somme. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer que

$$Var(X + Y) = VarX + VarY + 2Cov(X, Y)$$

Exercice 9 : La loi faible des grands nombres. Soit $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, de même loi.

On pose $Y_n = \frac{(X_1+X_2+\dots+X_n)}{n}$. Montrer que $E(Y_n) = E(X_1)$ et $Var(Y_n) = Var(X_1)/n$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\{w \in \Omega \text{ tel que } |Y_n(w) - E(X_1)| > \varepsilon\}) = 0$$