Université d'Angers L2

Série d'exercices n°2. Proba-Stats . 2010-2011

Exercice 1.

On étudie la population de grenouilles (Rana esculenta) d'un lac. On appellera N la taille de cette population. On capture 100 de ces amphibiens que l'on marque avant de les relacher dans leur milieu d'origine. On capture à nouveau 50 grenouilles. En supposant que les animaux marqués se sont répartis uniformément parmi ceux qui ne le sont pas, calculer la probabilité d'avoir k grenouilles marqués parmi les 50 dans les 2 cas suivants :

(1) On capture les 50 grenouilles ensemble (ou une à une sans les remettre dans le lac).

(2) On capture les 50 grenouilles une à une et après chaque capture on relache l'animal dans le lac.

Exercice 2.

Au jeu "tapis vert", le joueur parie une hauteur $\{7, 8, 9, 10, \text{valet, dame, roi, as}\}$ pour chaque couleur {trèfle, carreau, coeur, pique}. Calculer la probabilité d'avoir exactement 4, 3, 2, 1, puis 0 bonnes cartes.

Exercice 3.

On considère une urne contenant 4 boules rouges, 5 boules noires et 6 boules blanches. A part leur couleur, les boules sont identiques.

1) On tire 3 boules au hasard en même temps.

a) Combien y a-t-il de façon de choisir 3 boules parmi 15 ? (On pourra pour cette question ne pas tenir compte des couleurs et considérer que les boules sont numérotées de 1 à 15.)

b) On note les couleurs des 3 boules tirées. Quels sont les différents résultats possibles ? (On ne tient pas compte de l'ordre). Construire l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ correspondant.

c) Calculer les valeurs des probabilités des événements ne contenant qu'un seul résultat. (Par exemple la probabilité d'obtenir 3 boules de couleurs différentes).

d) Calculer les probabilités des évènements suivants :

A : "obtenir au moins une boule rouge."

B : "obtenir au moins 2 boules rouges."

C : "obtenir au moins 2 boules de la même couleur."

D : "obtenir une seule boule rouge et deux autres de la même couleur."

A/C : "obtenir au moins une boule rouge sachant qu'on obtient au moins 2 boules de la même couleur."

e) les évènements A et C sont-ils indépendants ?

2) On tire les 3 boules l'une après l'autre en remettant la boule tirée dans l'urne après chaque tirage. On note les couleurs des 3 boules tirées. Répondre aux questions c), d) et e) précédentes.

Exercice 4.

On joue au "tapis vert". Si on a 0 ou une seule bonne carte on perd, si on a 2 cartes, respectivement 3 cartes, respectivement 4 cartes, la mise est multipliée par 2, respectivement 30, respectivement 1000. Calculer l'espérance et l'écart-type du gain pour une mise de 2 F.

Exercice 5.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, calculer la loi de $X+Y$ dans les cas suivants :

(1) $X \sim b(\theta)$ et $Y \sim b(\theta)$.
(2) $X \sim \mathcal{B}(n, \theta)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, \theta)$.
(3) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.

Exercice 6 :(Dûr).
On dispose de 5 dés. On souhaite obtenir 5 fois la même face sans avoir prédéterminé la face commune. On a droit à trois lancers. On choisit alors la stratégie suivante :

- si après le premier lancer plusieurs dés donnent le même résultat, on ne relance que les autres dés, avec les cas particuliers suivants : un triple plus un double, on relance les 2 dés du double, deux doubles, on garde les dés comportant le résultat le plus élevé et on relance les autres. Au troisième lancer on ne lance que les dés donnant un résultat différent de celui des dés non lancés.
- si après le premier lancer les dés donnent des résultats différents, on les relance tous les 5, puis on adopte la stratégie précédente.

A l'aide de probabilités conditionnelles, calculer la probabilité d'obtenir au bout de 3 lancers 5 fois la même face.