

Donner $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω dans les cas suivants

- (1) $\Omega = \{1\}$, (2) $\Omega = \{1, 2\}$, (3) $\Omega = \{1, 2, 3\}$, (4) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, (5) $\Omega = \emptyset$.

Exercice 1 : Image réciproque de réunions. Soient X et Y deux ensembles, et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

- (1) Soient B_1 and B_2 deux parties de Y . Montrer que :

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

- (2) Soient $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ une suite de parties de Y . Montrer que :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} f^{-1}(B_n)$$

Exercice 2. On choisit successivement trois personnes dans une population. On note P_i l'événement "la i ème personne a un rhésus positif". Ecrire à l'aide des événements P_i les événements suivants :

- (1) "Au moins une personne a un rhésus positif" ;
- (2) "il n'y a pas de personnes qui ont un rhésus positif" ;
- (3) "seule la première personne a un rhésus positif" ;
- (4) "les deux premières personnes ont un rhésus positif et la troisième un rhésus négatif" ;
- (5) "au moins deux personnes ont un rhésus positif" ;
- (6) "au moins deux personnes ont un rhésus négatif" ;
- (7) "une personne seulement a un rhésus positif" ;
- (8) "deux personnes seulement ont un rhésus positif" ;
- (9) "au moins une des deux premières personnes a un rhésus positif" ;

Exercice 3. Deux événements A et B sont tels que $P(A) = P(B) = 0,75$.

- (1) Quel est au maximum la probabilité $P(A \cap B)$?
- (2) Quel est au minimum la probabilité $P(A \cap B)$?

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des événements . Montrer que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(\cap_{j=1}^k A_{i_j}) + \dots + (-1)^{n-1} P(\cap_{i=1}^n A_i).$$

Exercice 5 : Résultat à connaître par cœur. Considérons une suite de n épreuves indépendantes qui ont chacune une probabilité de succès p et d'échecs $1 - p$. Soit X la variable aléatoire obtenue en s'intéressant au nombre de succès obtenus lors de ses n épreuves.

Calculer $P(X = k)$ pour k compris entre 0 et n . Comment s'appelle la loi de X ?

Exercice 6 : Résultat à connaître par cœur. Considérons une suite infinie d'épreuves indépendantes qui ont chacune une probabilité de succès p et d'échecs $1 - p$. Soit X la variable aléatoire obtenue en s'intéressant au numéro de la première épreuve qui réussit.

Calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Comment s'appelle la loi de X ?