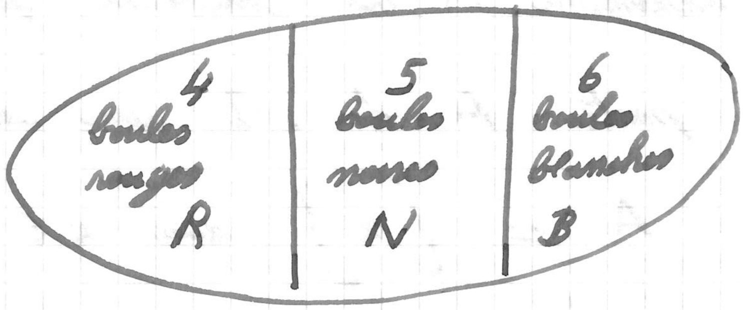
Exercice 1

urne contenant 15 boules au total



On tire 3 boules

on peut même supposer les boules rouges sont numerotées de 1 à 4, les boules noires à 5 à 9, Blanche de 10 à 15

1) Tirage sans remise

a) On considère que les boules sont numerotées de 1 à 15 (On peut faire cette hypothèse, cela ne change rien au tirage).

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} \text{parties à 3 elements} \\ \text{de } \{1, \ldots, 15\} \end{array} \right\}$$ muni de la probabilité uniforme

card Ω = nombre de façons de choisir 3 boules parmi 15 $= C_{15}^{3}$

b) On s'interesse aux couleurs des 3 boules tirées sans tenir compte de l'ordre

donc Ω = ensemble des resultats possibles

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} RRR, BBB, NNN, RRN, RRB \\ NNR, NNB, BBR, BBN, RNB \end{array} \right\}$$

Remarque Ω est l'ensemble des combinaisons avec repetition de longueur 3 obtenues à partir de l'ensemble $\{R, N, B\}$

donc

$$\text{card } \Omega = C_{3+3-1}^{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = 10$$

On prend comme tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ évidemment

c) Un evenement A ne contenant qu'un seul résultat est une partie A de Ω avec un seul element

c à d $A = \{x\}$ avec $x \in A$

exemple $A = \{RRR\}, \ldots$ ou $A = \{RRN\}, \ldots$

$P(\{RRR\})$ note abusivement $P(RRR)$

$$P(RRR) = \frac{\text{nbre de partie à 3 elements de } \{1, \quad, 4\}}{\text{nbre de partie à 3 elements de } \{1, \quad, 15\}} = \frac{C_4^3}{C_{15}^3}$$

$$P(RRN) = \frac{\text{nbre de parties à 3 elements de } \{1, \quad, 15\} \text{ avec 2 elements dans } \{1, \quad, 4\} \text{ et 1 element dans } \{5, \quad 9\}}{\text{nbre de partie à 3 elements de } \{1, \quad, 15\}}$$

$$= \frac{C_4^2 \, C_5^1}{C_{15}^3}$$

plus généralement

on choisit les r boules rouges parmi les 4 possibles

$$P\begin{pmatrix} \text{obtenir } r \text{ boules rouges} \\ n \text{ boules noirs} \\ b \text{ boules blanches} \end{pmatrix} = \frac{C_4^{\,r} \times C_5^{\,n} \times C_6^{\,b}}{C_{15}^3}$$

$b = 3 - r - n$

$r + n + b = 3$

$\boxed{\text{generalisation de la loi hypergeometrique}}$

on a 3 couleurs au lieu de 2

d) A = "obtenir au moins une boule rouge"

Non A = "obtenir 0 boules rouges"

on choisit les 3 boules parmi les noires et blanches

$$P\left(\begin{array}{c}\text{obtenir } 0\\ \text{boules rouges}\end{array}\right) = \frac{C_{11}^{3}}{C_{15}^{3}}$$

4 rouges | 11 noires et blanches

donc $P(A) = 1 - P(\text{Non } A) = 1 - \dfrac{C_{11}^{3}}{C_{15}^{3}} = \dfrac{58}{91}$

B = "obtenir au moins 2 boules rouges"

$= \{RRR, RRN, RRB\}$

$$P(B) = P(RRR) + P(RRN) + P(RRB) = \frac{C_4^3 + C_4^2 C_5^1 + C_4^2 C_6^1}{C_{15}^3}$$

C = " obtenir au moins 2 boules de la même couleur "

non $C = \{R\,N\,B\}$ $\quad P(C) = 1 - P(RNB) = 1 - \dfrac{4 \times 5 \times 6}{C_{15}^{3}}$

D = "obtenir une seule boule rouge et deux autre de la même couleur" $= \left\{\begin{array}{l} NNR, \\ BBR \end{array}\right\}$

$$P(D) = P(NNR) + P(BBR) = \frac{4C_5^2 + 4C_6^2}{C_{15}^3}$$

A/C = " obtenir au moins une boule rouge sachant qu'on obtient au moins 2 boules de la même couleur"

$P(A/C) = P(A \cap C) / P(C)$ par définition des probabilités conditionnelles.

$A \cap C$ = " obtenir au moins une boule rouge et au moins 2 boules de la même couleur " donc

$A \cap C =$ sont la meme couleur des 2 boules n'est pas rouge D $\cup$ sont la meme couleur des 2 boules est rouge B

donc $A \cap C$ reunion disjoint de D et B

donc $$P(A \cap C) = P(D) + P(B) = \frac{4\left(C_5^2 + C_6^2\right) + 4 + (5+6)C_4^2}{C_{15}^3}$$

donc
$$P(A/C) = \frac{4\left(\frac{5\times 4}{2} + \frac{6\times 5}{2}\right) + 4 + 11 \times \frac{4\times 3}{2}}{\frac{15\times 14\times 13}{3!} - 4\times 5\times 6} = \frac{3.}{67}$$

e) A et C independant si $P(A \setminus C) = P(A)$
par definition $\frac{34}{67} \neq \frac{58}{91}$
donc A et C ne sont pas independant
on se doutait meme que $P(A \mid C) < P(A)$
car si vous savez que vous avez au moins 2 boules de la meme couleur, vous avez moins de chances d'avoir au moins une boule rouge que si vous ne savez rien

2) tirage avec remise b) même reponse qu'au 1)

c) Generalisation de la loi binomiale : suite de 3 epreuves independantes avec pour chaque epreuve une probabilité $\frac{4}{15}$ d'obtenir une boule rouge

——— $\frac{5}{15}$ ——— noire

$\frac{6}{15}$ ——— blanche.

numero du tirage	1	2	3
couleur de la boule tiré			

obtenu ...

$$P\begin{pmatrix} r \text{ boules rouges} \\ n \text{ boules noires} \\ b \text{ boules blanches} \\ r+n+b=3 \end{pmatrix} = C_3^r \times \left(\frac{4}{15}\right)^r C_{3-r}^n \times \left(\frac{5}{15}\right)^n \times \left(\frac{6}{15}\right)^b$$

③

On choisit les numeros des tirages ou on va tirer des boules rouges

probabilite de tirer des boules rouges lors de ces r tirages

On choisit les numeros des tirages ou on va tirer des boules noires parmi les 3−r tirages restants

---

probabilite que les n tirages ou on a choisi de tirer des boules noires donne effectivement des boules noires

probabilites que l'on tire des boules blanches lors des tirages restant

---

d) $P(A) = 1 - P\begin{pmatrix}\text{obtenu } 0 \\ \text{boules rouges}\end{pmatrix} = 1 - \left(\frac{5+6}{15}\right)^3$

apres d) et e) meme methode

sans calcul A et C sont dependants.

<u>Exercice 4</u>

1. $X \sim b(\theta)$ veut dire que X suit la loi de Bernouilli de parametre θ

$P(X=1) = \theta \quad P(X=0) = 1-\theta$

$Y \sim b(\theta) \quad P(Y=1) = \theta \quad P(Y=0) = 1-\theta$

trouvons la loi de $X+Y$ c à d $P(X+Y=k)$

$$P\begin{pmatrix} \text{obtenir} \\ r \text{ boules rouges} \\ n \text{ boules noires} \\ b \text{ boules blanches} \\ r+n+b=3 \end{pmatrix} = C_3^{\,r} \times \left(\frac{4}{15}\right)^r C_{3-r}^{\,n} \times \left(\frac{5}{15}\right)^n \times \left(\frac{6}{15}\right.$$

On choisit les numeros des tirages ou on va tirer des boules rouges

probabilite de tirer des boules rouges lors de ces r tirages

On choisit les numeros des tirages ou on va tirer des boules noires parmi les 3 − r tirages restants

probabilite que les n tirages ou on a choisi de tirer des boules noires donne effectivement des boules noires

probabilite que l'on tire des boules blanches lors des tirages restant

d) $P(A) = 1 - P\begin{pmatrix} \text{obtenir } 0 \\ \text{boules rouges} \end{pmatrix} = 1 - \left(\frac{5+6}{15}\right)^3$

apres d) et e) meme methode

sans calcul A et C sont dependants.