

I Test du Khi-deux χ^2 de conformité à une loi théorique

Soit Λ un ensemble ou population

On découpe Λ en k événements ou classes $C_1, C_2, \dots, C_k$.

Sur un échantillon de taille n , les effectifs observés des événements $C_1, C_2, \dots, C_k$ sont $n_1, n_2, \dots, n_k$.

hypothèse H_0 . Les probabilités de chaque événement $C_1, C_2, \dots, C_k$ sont $p_1, p_2, \dots, p_k$.

classes	C_1	C_2	C_k	total
effectifs observés	n_1	n_2	n_k	n
probabilités théoriques	p_1	p_2	p_k	1
effectifs théoriques	np_1	np_2	np_k	n

Théorème Si $\forall i \quad np_i \geq 5$

Sous l'hypothèse H_0 , la variable aléatoire

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \text{ suit une loi } \chi^2 \text{ à}$$

$k-1-r$ degrés de liberté où r est le nombre de paramètres de la loi théorique qu'il faut estimer

Si la valeur constatée de χ^2 sur l'échantillon considérée χ_c^2 est $\geq \chi_\alpha^2$, on écarte l'hypothèse H_0 avec une probabilité α de se tromper.

α risque de première espèce

si $\chi_c^2 \leq \chi_\alpha^2$, on garde l'hypothèse H_0

Remarque: Pour appliquer le théorème, on peut être amené à regrouper des classes pour assurer que les $n_i p_i \geq 5$.

II Test du χ^2 - deux d'indépendance

on veut tester l'indépendance de deux caractères A et B

Tableau effectif Observés / Calculés

		B		B_l	marge de A
		B_1	B_2		
A	A_1	O_{11} C_{11}	O_{12}	O_{1l}	S_1
	A_2	O_{21} C_{21}			
AB					S_A
marge de B		T_1		T_l	N

effectif observés de $A_i \cap B_j = O_{ij}$

$$S_i := \sum_{j=1}^l O_{ij}, \quad T_j := \sum_{i=1}^h O_{ij}$$

effectif marginaux observés de A et de B

hypothèse H_0 Les caractères A et B sont indépendants

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i) \times P(B_j)$$

$$\frac{C_{ij}}{N} = \frac{S_i}{N} \times \frac{T_j}{N}$$

C_{ij} = effectif théoriques de $A_i \cap B_j$ sous l'hypothèse H_0

donc $C_{ij} = \frac{S_i \times T_j}{N}$

Théorème admis Si $\forall i, \forall j \quad C_{ij} \geq 5$
 Sous l'hypothèse H_0 , la variable aléatoire

$$Y^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{(O_{ij} - C_{ij})^2}{C_{ij}} \quad \text{suit la loi du}$$

χ^2 à $(k-1)(l-1)$ degrés de liberté.

Soit α le risque de première espèce.

On lit sur la table du χ^2 , la valeur χ_α^2 telle que

$$P(Y^2 \geq \chi_\alpha^2) = \alpha$$

Soit χ_c^2 la valeur calculée de Y^2

Si $\chi_c^2 \geq \chi_\alpha^2$ on rejette l'hypothèse H_0 avec une probabilité α de se tromper

Si $\chi_c^2 < \chi_\alpha^2$ on ne peut pas rejeter l'hypothèse H_0 .