

Approximations de loi

I Approximation de la loi hypergéométrique par binomiale Guly-Delord-Fodori

loi hypergéométrique $HB(n, B, N)$ = tirage sans remise de n boules
par $B+N$ boules

Si $B+N > 10n$, on approxime la loi hypergéométrique
par la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{B}{B+N}$

car Comme le nombre de boules dans l'urne est grand
par rapport aux nombres de boules tirées, tirage sans remise
= tirage avec remise

Exemple Exo 11 p 61

II Approximation de loi binomiale de paramètres n et p par la loi
de Poisson $P(\lambda)$ avec $\lambda = np$ si n grand $n \gg 30$
et p petit $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$

remarque Exo 2 les ont même espérance $np = \lambda$

Reuve Degane

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{n \times n \times \dots \times n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Si n est grand par rapport à k

$$\frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{n \times n \times \dots \times n} \approx 1 \times \dots \times 1$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{(n-k) \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)}$$

$$\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \simeq -\frac{\lambda}{n} \quad \text{si } \mu = \frac{\lambda}{n} \text{ est petit}$$

donc si n est grand par rapport à k

$$(n-k) \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \simeq n \frac{-\lambda}{n} = -\lambda$$

$$\text{donc } \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}$$

Bilan Si n grand par rapport à k et μ petit

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \mu^k (1-\mu)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

III Théorème de la limite centrale Saporta ou Degraive (Admis)

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de variables

aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ de même loi. Soit μ leur moyenne et σ leur écart-type

$$\text{Soit } Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

alors Y_n converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

c à d Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{F_{Y_n}(x)}_{\text{fonction de répartition de } Y_n} = \underbrace{\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt}_{\text{fonction de répartition de la probabilité } \mathcal{N}(0, 1)}$$

en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Y_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

Remarque Y_n est la variable aléatoire centrée réduite

associée à $X_1 + \dots + X_n$:

$$E(Y_n) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var } Y_n &= \text{Var} \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sigma \sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma^2 (\sqrt{n})^2} \text{Var} (X_1 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{\sigma^2 (\sqrt{n})^2} n \sigma^2 = 1 \end{aligned}$$

car les X_i sont indépendantes

IV Application Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . Soit $q = 1 - p$. Si $p \geq \frac{5}{n}$ et $q \geq \frac{5}{n}$ et $n \geq 30$. Alors pour tout $k, l \in \mathbb{N}$

$$P(k \leq X \leq l) = P(k - 0,5 \leq Y \leq l + 0,5)$$

où Y suit une loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$

Remarque

$$\begin{cases} E(X) = np = E(Y) \\ \text{Var } X = npq = \text{Var } Y \end{cases}$$

Preuve: Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de n variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p . Alors $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est une loi binomiale de paramètres n et p .

D'après le théorème de la limite centrale avec $\mu = p$ et $\sigma = \sqrt{pq}$

$$Y_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{pq} \sqrt{n}} \text{ suit une loi normale}$$

$N(0, 1)$ pour n assez grand

donc par définition de la loi normale $N(np, npq)$

S_n une loi normale $N(np, npq)$.

IV Exemple 1.4.15 Luck cours

On plante dans un champ $n=2000$ graines qui ont chacune une probabilité $p = 0,85$ de germer.

Quelques semaines plus tard, on regarde le nombre X de graines ayant germé. $P(X=k) = \binom{2000}{k} 0,85^k 0,15^{2000-k}$

X suit une loi binomiale de paramètres n et p

$$E(X) = np = 2000 \times 0,85 = 1700$$

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var } X} = \sqrt{2000 \times 0,85 \times (1-0,85)} = 15,9687 \dots \approx 16$$

On veut calculer

$$P(|X - 1700| \leq 16) = P(1684 \leq X \leq 1716)$$

$$= \sum_{k=1684}^{1716} \binom{2000}{k} 0,85^k 0,15^{2000-k}$$

facile à calculer = 0,6986 à l'aide d'un ordinateur

Mais ici n est grand $n \gg 30$

• Si p petit $\leadsto$ loi de Poisson NON ici p
 n est pas petit

• $\frac{5}{n} \leq p \leq 1 - \frac{5}{n}$ $\leadsto$ loi normale
 $\frac{5}{n}$ " 0,0025 $\frac{5}{n}$ " 0,9975

Donc on peut considérer que X suit une loi normale

$$N(1700, 16)$$

$$\text{donc } P(1684 \leq X \leq 1716) = P(1683,5 \leq X \leq 1716,5)$$

$$= P\left(\frac{1683,5 - 1700}{16} \leq \frac{X - 1700}{16} \leq \frac{1716,5 - 1700}{16}\right)$$

$$= P(-1,03 \leq \frac{X - 1700}{16} \leq 1,03) \quad \text{comme } \frac{X - 1700}{16} \text{ suit}$$

$$= F_{N(0,1)}(1,03) - F_{N(0,1)}(-1,03) \quad \text{une loi } N(0,1)$$

$$= F_{N(0,1)}(1,03) - (1 - F_{N(0,1)}(1,03))$$

$$= 2 F_{N(0,1)}(1,03) - 1 = 2 \times 0,8485 - 1$$

d'après Table

$$= 0,697 \quad \text{à comparer aux résultats précédents}$$

Remarque L'élargissement de l'intervalle $[k, l]$ en $[k-0,5, l+0,5]$
 est dû au fait qu'on modélise une variable aléatoire
 discrète à valeurs entières par une variable aléatoire continue

On appelle ϵ -éloignement, conjecture de continuité