

chap II Variables aleatoires continues

P25

Rappel Intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}$

I Probabilité sur un univers Ω infini et pas dénombrable : Exemples

• Considérons le carré $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, Ω n'est pas fini, pas

l'application $P: \mathcal{P}([0, 1] \times [0, 1]) \xrightarrow{\text{dénombrable}} \mathbb{R}^+$

$A \mapsto P(A) = \text{surface de } A$

est une probabilité

en effet $P(\Omega) = (1-0) \times (1-0) = 1$ surface du carré

En fait, il y a des parties A de $[0, 1] \times [0, 1]$

très compliquées qui n'ont pas de surfaces

donc P n'est pas défini sur tous les éléments

de $\mathcal{P}(\Omega)$: Nous allons ignorer ce problème !

• le même exemple en 1 dimension

Considérons l'intervalle $\Omega = [0, 1]$

Ω n'est pas fini, pas dénombrable

l'application $P: \mathcal{P}([0, 1]) \xrightarrow{\text{dénombrable}} \mathbb{R}^+$

$A \mapsto P(A)$ via la longueur de A

$P(A) = \int_A 1 \, dx$ probabilité uniforme sur $[0, 1]$

on ne sait pas calculer $\int 1 dx$ pour toutes les parties A de $[0, 1]$. p26
 Nous allons ignorer ce problème!
 • Probabilité uniforme sur $[a, b]$ Ex $[a, b] = [0, 1]$

$$\Omega = \mathbb{R}$$

L'application $P: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$A \longmapsto \frac{\text{longueur de } A \cap [a, b]}{b - a}$$

• Probabilité de Gauss

$$\Omega = \mathbb{R}$$

L'application $P: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$A \longmapsto P(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$$P(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = 1$$

• revenons à la probabilité uniforme sur $[a, b]$

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$$

$$P(A) = \int_A f(x) dx$$

Soit $\Omega = \mathbb{R}$

Soit $P : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une probabilité quelconque
 $A \longmapsto P(A)$

def On appelle fonction de répartition de P

l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$

$$t \longmapsto P\left(]-\infty, t]\right)$$

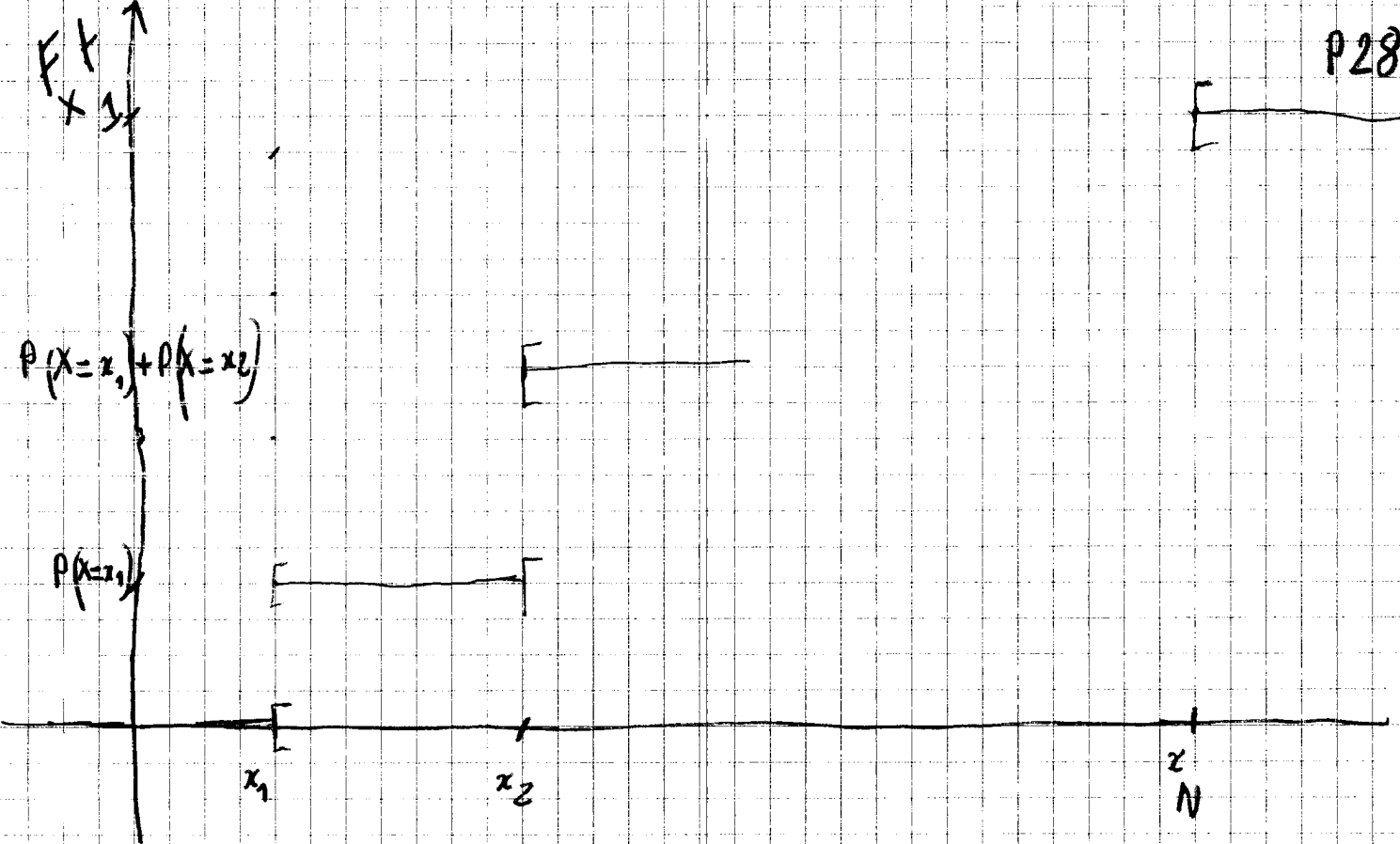
Soit X une variable aléatoire quelconque à valeurs dans $\Omega = \mathbb{R}$, on appelle fonction de répartition de X ,

l'application $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$

$$t \longmapsto P_X\left(]-\infty, t]\right) \stackrel{\text{def}}{=} P(X \in]-\infty, t]) \\ = P(X \leq t)$$

Exemple Si X admet un nombre fini de valeurs $x_1 < x_2 < \dots < x_N$

$$\begin{aligned} F_X(x_i) &= P(X \leq x_i) = P(X \leq x_{i-1}) + P(X = x_i) \\ &= F_X(x_{i-1}) + P(X = x_i) \end{aligned}$$



Répetition (admis) Fofda - Faicho 5.1 p 48

La fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs réelles réelles

(1) $0 \leq F(x) \leq 1$

ii) F est une fonction croissante, continue à droite en tout point x

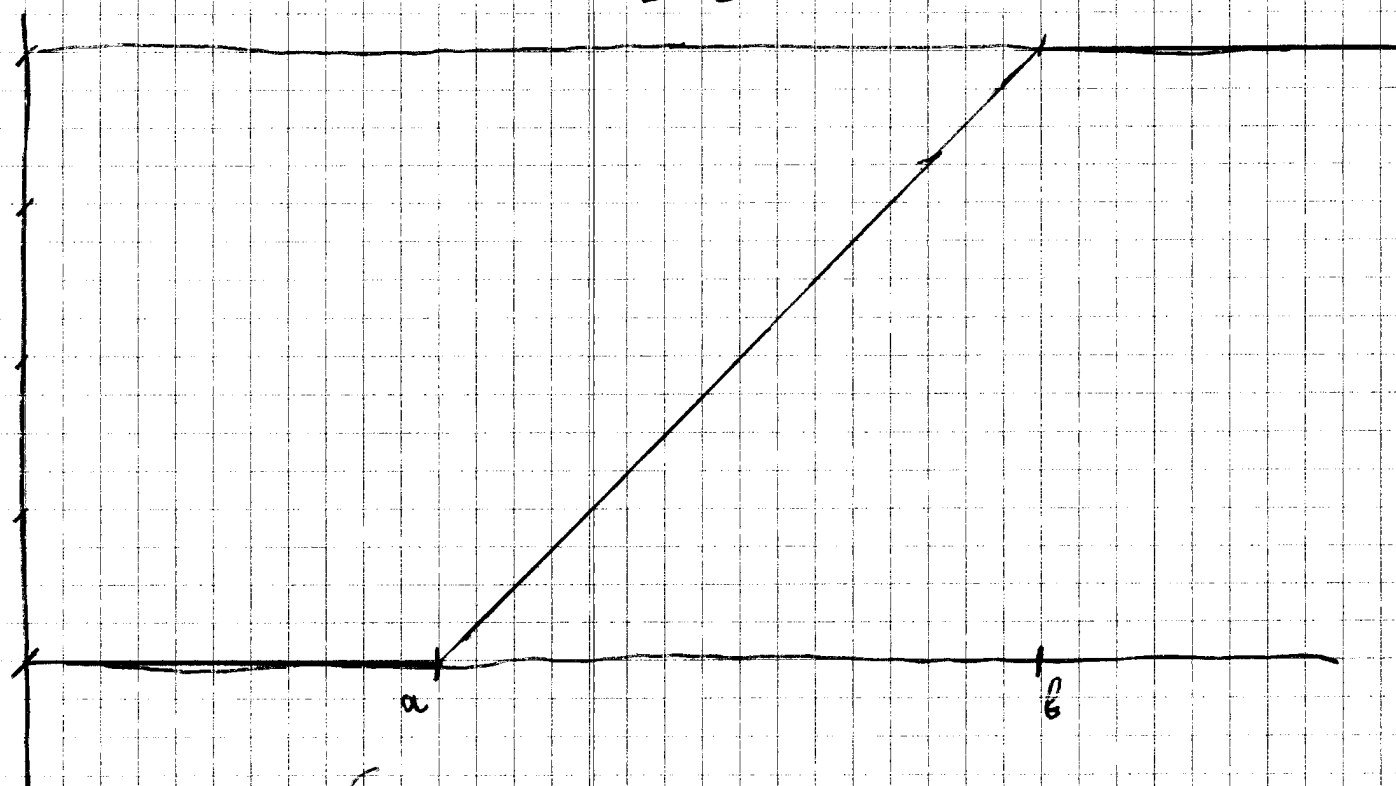
iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Preuve de (a)

$$F(x) = P_X\left[]-\infty, x\right] \leq P_X(\mathbb{R}) = 1$$

car $]-\infty, x] \subset \mathbb{R}$

ii) croissante

Ex Probabilité uniforme sur $[a, b]$ 

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$$

continue sur $\mathbb{R}$ sauf en a et b

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{b-a} \text{ longueur de }]-\infty, x] \cap [a, b]$$

$$\text{si } x < a \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0 = \frac{1}{b-a} \text{ longueur de } \emptyset$$

$$\text{si } a \leq x \leq b \quad F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \text{ longueur de } [a, x] = \frac{x-a}{b-a}$$

$$\text{si } x \geq b \quad F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \int_b^x 0 dt = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

fin cours Vendredi 6 Mars 2009

 $\frac{1}{b-a}$ longueur de $[a, b]$

III) Probabilité à densité ou continue

p 30

Ici $\Omega = \mathbb{R}$

$$\text{Soit } P : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ A \longmapsto P(A)$$

Une probabilité P à densité est une probabilité sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ et la fonction de répartition F est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R} \\ F(t) = P\left]\!-\infty, t\right] = \int_{-\infty}^t f(t) dt$$

f est la densité de la probabilité

- f doit être positive : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$
- f doit être continue pour tout $x \in \mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points où elle admet une limite à gauche et une limite droite finies

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \text{ doit exister et être égale à } 1$$

Propriétés

F est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P(\{a\}) = 0$$

$$P([a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles : $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

def on dit que X est une variable à densité ou continue

si sa loi P_X est une probabilité à densité ou continue

$\Leftrightarrow$ sa fonction de répartition

$$F_X(x) : \stackrel{\text{def}}{=} P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

où f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ peut-être

ou une somme finie de points et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$

existe et est égale à 1

Propriété F_X est continue sur $\mathbb{R}$

$P(X = a) = 0$ / Faux pour une variable aléatoire discrète

$$P(X \in [a, b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t) dt$$

Soit X une variable aléatoire réelle continue.

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sa densité

def L'espérance de X , $E(X)$ est, si elle existe,

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

de la même façon le cas des variables discrètes

Propriété: Soit $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue

Soit $Y = \varphi \circ X$ la variable aléatoire continue égale à la composée de X et de φ .

Alors
$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$$

def Soit X une variable aléatoire réelle continue admettant une espérance $E(X)$, la variance si elle existe est

$$\begin{aligned} \text{Var } X &= E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E(X^2) - E(X)^2 \\ \text{d'après Propriété} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E(X)^2 \end{aligned}$$

V Exemples de variables aléatoires réelles continues Cauchy - Delord - Fudon p33

- loi uniforme sur $[a, b]$ déjà vu
 $E(X) = \frac{a+b}{2}$ Var $X = \frac{(b-a)^2}{12}$ Exo TD
- loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

Soit X une variable aléatoire continue.

def on dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ si elle admet pour densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{on vérifie } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var } X = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{Exo TD}$$

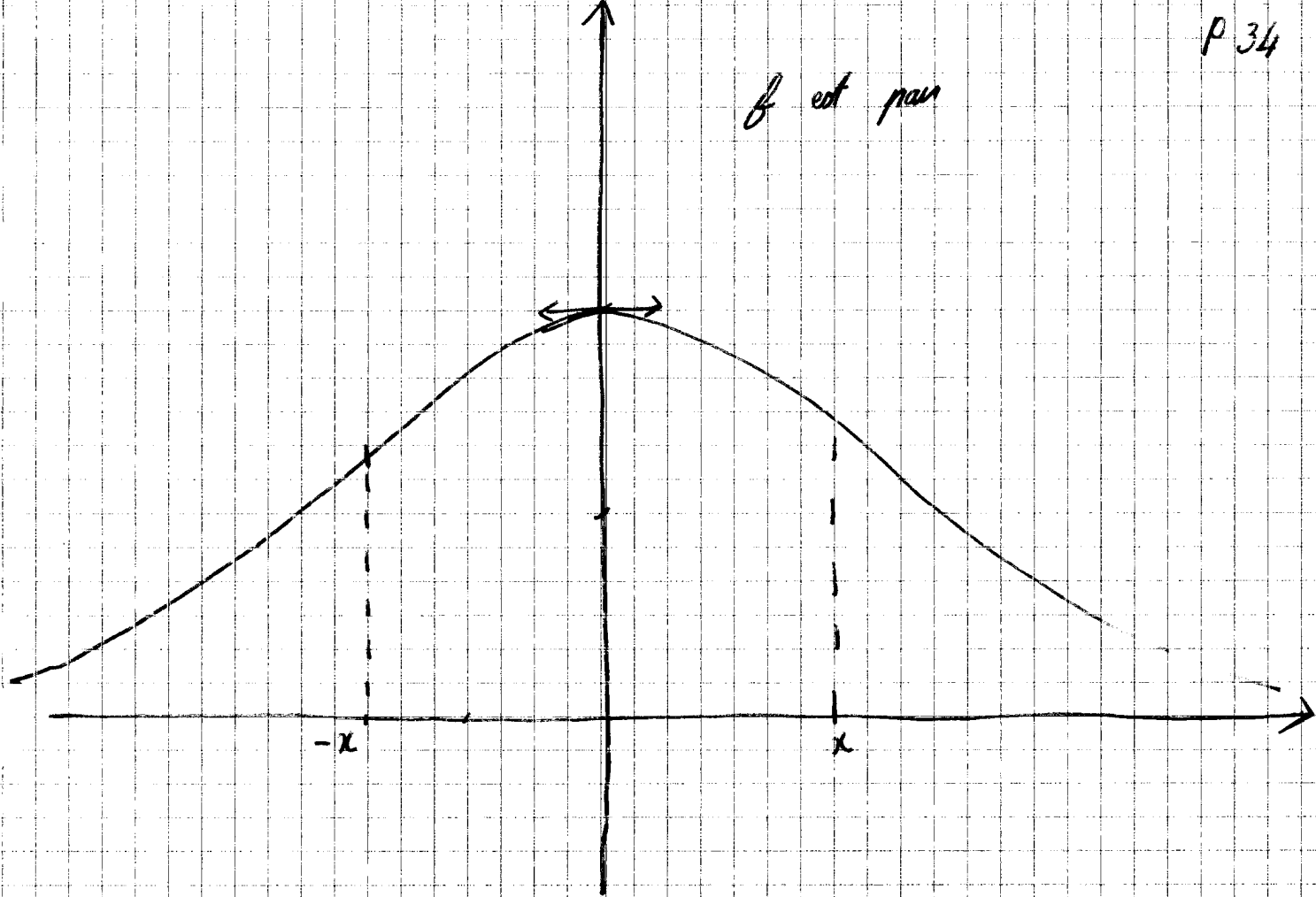
- loi normale (ou de Gauss ou de Laplace - Gauss)

a) normale centrée réduite $N(0, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

fonction de répartition F

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

f est pair

$F(x)$ = surface sous la courbe entre $-\infty$ et x

$F(0) = \frac{1}{2}$ car comme f est paire la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des x

$$F(-x) + F(x) = 2 F(0) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Il est impossible d'avoir une formule pour $F(x)$.

Des tables donnent $F(x)$ pour $x \geq 0$.

On en déduit $F(x)$ pour $x < 0$ en utilisant

$$F(-x) + F(x) = 1$$

Choix admis

$F(x) = 0$ pour $x = -1$ d'où le nom "fonction de répartition".

b) Cas général

donc on dit que Y suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$
de moyenne μ et d'écart type σ

si $X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$ suit une loi
normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

Propriété Si Y est une variable aléatoire d'espérance μ
et de variance σ^2
alors $X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$ a pour espérance 0
et variance 1.

Preuve rappel démontrer $E(aX+b) = aE(X)+b$ $Var(aX+b) = a^2 Var X$

$$E(X) = E\left(\frac{Y - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} (E(Y) - E(\mu)) \\ = \frac{1}{\sigma} (E(Y) - \mu) = 0$$

$$Var\left(\frac{Y - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} Var(Y - \mu) = Var Y$$

car μ constante

Proposition la densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Preuve à faire