Probabilité ~~sur un univers fini ou dénombrable~~

I Espaces probabilisés

1/ ~~Événements~~ univers fini ou dénombrable

On s'intéresse à une expérience dont le résultat est aléatoire

Exemple On lance un dé et on s'intéresse au chiffre figurant sur la face de dessus

L'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire est appelé univers et est noté Ω.

Exemple $\Omega = \{1, 2, \quad , 6\}$

déf L'ensemble Ω est fini de cardinal n si il existe une bijection de

$$\{1, \quad , n\} \longrightarrow \Omega$$

c à d $\Omega = \{\omega_1, \quad , \omega_n\}$

déf L'ensemble Ω est dénombrable si il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur Ω

~~On peut numéroter~~

c à d $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \quad , \omega_n, \ldots\ldots\}$

⚠ Il existe des ensembles infinis non dénombrables

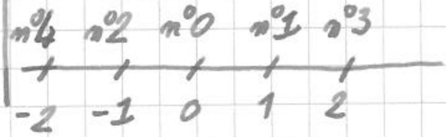
exemple $\mathbb{R}$

~~déjà fait au lycée~~

~~Dans ce chapitre~~, ~~on prendra toujours Ω fini ou dénombrable~~

ensembles

finis	infinis	
	dénombrables	non dénombrables
$\{1, 2, \quad , n\}$	$\mathbb{N}$	
	$\mathbb{Z}$	



Rappel sur les series

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels

def On appelle serie de terme general u_n notée $\sum u_n, n \geq 0$, la suite des sommes partielles d'ordre n $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

def la serie $\sum u_n$ converge si la suite S_n converge

def Si la serie $\sum u_n$ converge, on appelle somme de la serie, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, la limites des S_n $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Propriete Si $\sum u_n$ converge alors $\lim u_n = 0$. Demo

Exemple Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ ex $\lambda = 1$ $\quad e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$

2°/ Evenements

définition On appelle événement une partie A de l'univers Ω

exemple $A = \text{"pair"} = \{2, 4, 6\}$

La théorie des probabilités utilise la théorie des ensembles mais avec une terminologie différente

Dictionnaire

notation	langage ensembliste	langage probabiliste
Ω	ensemble	univers
$\omega \in \Omega$	element de Ω	resultat possible de l'expérience
$A \subset \Omega$	A partie de Ω	evenement

Mardi 20 Janvier 2009

$\{\omega\}$	singleton	evenement elementaire
$A \cap B$	intersection	~~evenement~~ A et B
$A \cup B$	reunion	A ou B
$\bar{A}$	complementaire de A	contraire de A
$\emptyset$	ensemble vide	evenement impossible
Ω		evenement certain
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles
$A \subset B$	A est contenu dans B	l'evenement A implique l'evenement B

3°/ Probabilité

Soit Ω un ensemble. Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

def On appelle probabilité sur l'univers Ω une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$A \longmapsto P(A) \overset{\text{def}}{=} \text{probabilité de l'événement } A$$

telle que

① $P(\Omega) = 1$: * La probabilité de l'événement certain est 1

② Condition d'additivité dénombrable

Soit $A_0, A_1, \quad , A_n, \dots,$ une suite d'événements incompatibles 2 à 2

Alors $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

plus précisément la série $\sum P(A_n)_{n \geq 0}$ converge et a pour somme $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$.

1 ~~On~~

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé espace probabilisé

Propriété des probabilités

Toute probabilité P sur Ω vérifie

a) $P(\emptyset) = \emptyset$: La probabilité de l'événement impossible est nulle

11) bis

Soient A et B deux evenements tq $A \subset B$

alors $P(A) \leqslant P(B)$

en particulier pour tout evenement A $P(A) \leqslant 1$.

Preuve • $B = A \cup B \setminus A$

A et $B \setminus A$ sont incompatibles

donc $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geqslant P(A)$ car $P(B \setminus A) \geqslant 0$

• $A \subset \Omega$ $P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$

Preuve Posons $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\forall\, i, j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$ donc d'après 2)

la série $\sum P(\emptyset)$ converge donc $P(\emptyset) = 0$ $\square$

ii) Condition d'additivité finie

Soient A et B deux évènements ~~disjoints~~ incompatibles

alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

~~iii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$~~

Preuve
Posons $A_0 = A \quad A_1 = B \quad A_n = \emptyset$ si $n \geq 2$

d'après 2)

$$P(A \cup B) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

$$= P(A) + P(B) + \cancel{\sum_{n=2}^{+\infty} P(\emptyset)} \quad \text{d'après (i)} \quad \square$$

iii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Preuve A et $\bar{A}$ sont des évènements incompatibles

donc d'après ii)

$$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

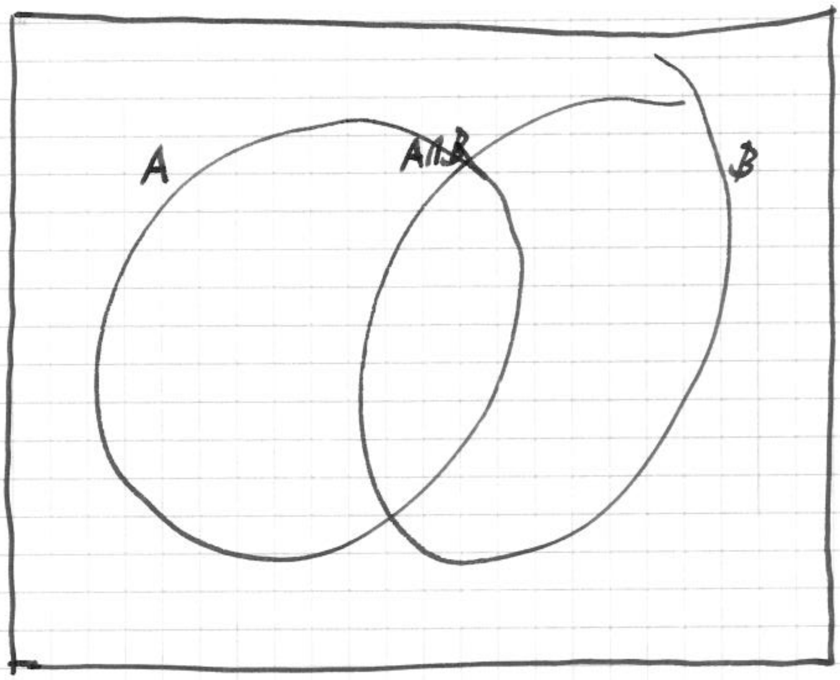
$$P(\Omega) = 1 \quad \text{d'après ①}$$ $\square$

Vendredi le 23 Janvier 2009

iv) Soient A et B deux évènements quelconques

alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Preuve



$$A \cup B = A \setminus B \cup A \cap B \cup B \setminus A$$

$$A = A \setminus B \cup A \cap B$$

$$B = A \cap B \cup B \setminus A$$

Toutes ces réunions sont disjointes donc d'après 1)

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

d'où $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ $\square$

Remarque Si Ω est un ensemble fini, dans la définition de probabilité, on peut remplacer la condition d'additivité dénombrable 2) par l'additivité finie 1)

Preuve de Remarque ~~on~~ à faire en TD.

~~Soit $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application vérifiant 1)~~

Soit $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application verifiant ii) et 1)

d'apres ii) $P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$

$$P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset)$$

donc $P(\emptyset) = 0$

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'evenements incompatibles 2 à 2.

Demontrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$

$$A_n = \emptyset.$$

Demo par absurde on suppose qu'il existe une infinité de A_n different de l'evenement impossible

c à d il existe une suite extraite

$A_{\varphi(0)}, A_{\varphi(1)}, \quad , A_{\varphi(n)}, \ldots$

telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{\varphi(n)} \neq \emptyset$

φ application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante

$\forall i \neq j \quad A_{\varphi(i)}$ et $A_{\varphi(j)}$ sont disjoints

donc

$$A_{\varphi(i)} \neq A_{\varphi(j)}$$

en effet si $A_{\varphi(i)} = A_{\varphi(j)}$

$$\emptyset \neq A_{\varphi(i)} = A_{\varphi(i)} \cap A_{\varphi(j)} = \emptyset$$

donc la suite $A_{\varphi(n)}$ est une suite d'elements de $\mathcal{P}(\Omega)$

4°/ ~~Exemple~~ Construction de Probabilités

a/ sur un univers fini

Proposition Soit Ω un ensemble fini de cardinal N

$$\Omega = \{1, 2, \quad , N\}$$

Soient $p_1, p_2, \quad , p_N$ N reels positifs

telles que $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$.

Alors l'application $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$A \longmapsto P(A) = \sum_{i \in A} p_i$$

est une probabilité sur Ω.

Réciproquement toute probabilité sur Ω est obtenue de cette façon.

Preuve

$$P(\Omega) = \sum_{i \in \{1, 2, \quad , N\}} p_i = 1$$ donc ① vérifié

Soient A et B deux parties de Ω disjointes

$$A = \{a_1, \quad , a_p\} \quad B = \{b_1, \quad , b_q\}$$

$$A \cup B = \{a_1, \quad , a_p, b_1, \quad , b_q\}$$

$$P(A \cup B) = p_{a_1} + \quad + p_{a_p} + p_{b_1} + \quad + p_{b_q}$$

$$= P(A) + P(B)$$ donc ii) est vérifié donc

donc d'après remarque, P est une probabilité

Réciproque

Soit P un probabilité sur ~~Ω~~ ~~[illegible]~~

$$A = \bigcup_{i \in A} \{i\} \quad \text{réunion disjointe}$$

donc $$P(A) = \sum_{i \in A} \underbrace{P(\{i\})}_{p_i}$$

~~donc~~ ~~Et~~

$$\Omega = \{1, 2, \quad , N\}_N$$

donc $$1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{N} p_i$$ $\square$

Exemple Probabilité uniforme ou équiprobabilité

$$P(\{i\}) = \frac{1}{N} \quad \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant N$$

donc $$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

b) ~~[illegible]~~ sur un univers dénombrable

Soit Ω un ensemble dénombrable

$$\Omega = \mathbb{N}$$

Soit ~~[illegible]~~ $\sum p_n$, $n \in \mathbb{N}$ une série

convergente à termes positifs telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$$

~~donc d'après Remarque~~

~~p est une probabilité~~

Alors on définit une probabilité P sur $\Omega = \mathbb{N}$

en posant pour tout $A \subset \mathbb{N}$

$$P(A) = \sum_{n \in A} p_n$$

plus précisément $\sum_{n \in A} p_n$ est la somme de la

série de terme général $q_n = \begin{cases} p_n & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

en particulier si A est fini, c'est une somme finie

Réciproquement toute probabilité sur $\mathbb{N}$ est obtenue de cette façon

Preuve admise

exemple Probabilité de Poisson de paramètre λ

$$P(\{n\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

on a bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1$$

Soit A = l'ensemble des entiers naturels pairs

Calculons $P(A)$

la suite q_n associé^q est définie par $q_n = 0$ si n impair

$$q_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{si } n \text{ pair}$$

Donc $$q_n = \frac{1+(-1)^n}{2} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{2}\left(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\right)$$

Par définition cosinus hyperbolique de λ, $\operatorname{ch} \lambda \overset{\text{def}}{:=} \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}$

donc $P(A) = e^{-\lambda} \operatorname{ch} \lambda$

Mardi 27 Janvier 2009

II Variables aleatoires discretes

1°/ Definition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé

def Une variable aleatoire discrete X est une application $X : \Omega \longrightarrow E$

où E est une partie fini ou denombrable de $\mathbb{R}$. c à d $E = \{x_1, \quad , x_n\} \subset \mathbb{R}$ ou $\{x_0, x_1, \quad , x_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}$

Exemple On jete deux dé un de rouge et un dé vert

$$\Omega = \{1, 2, \quad , 6\}^2$$

La somme des deux dés est une variable aleatoire discrète.

En effet, la somme est l'application

$$\{1, 2, \quad , 6\}^2 \longrightarrow \{2, 3, 4, \quad , 12\}$$

$$(r, v) \longmapsto r + v = \text{valeur du dé rouge} + \text{valeur du dé vert}$$

2°/ loi d'une variable aleatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé

Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aleatoire discrète

Proposition et définition

La loi de X est la probabilité sur E notée P_X définie par pour toute partie B de E

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

L'évènement $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) \in B\}$ est notée plus simplement $X \in B$

L'évènement $X^{-1}(\{x_n\}) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) = x_n\}$ est notée plus simplement $X = x_n$

preuve Vérifions que P_X est une probabilité

P_X est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{R}^+$

$$P_X(E) = P(X^{-1}(E)) = P(\Omega) = 1$$

donc (1) vérifié

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E disjointe 2 à 2

$$X^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{-1}(B_n)$$ à faire en TD

Comme les B_n sont disjoints 2 à 2, les $X^{-1}(B_n)$ sont disjoint 2 à 2.

$$P_X\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \overset{\text{def}}{=} P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{-1}(B_n)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X^{-1}(B_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_X(B_n)$$ donc (2) est vérifié $\square$

Exemple X = somme de 2 dés à six faces

$$P_X\left(\{2\}\right) = P(X=2) = P\left(\{(1,1)\}\right) = \frac{1}{36}$$

3/ lois classiques

– loi uniforme

On dit que X suit une loi uniforme

si $X : \Omega \longrightarrow E = \{1, 2, \quad , N\}$

~~$P(X=i) = \frac{1}{N}$~~ pour

et la loi P_X est la probabilité uniforme

sur $E = \{1, 2, \quad , N\}$

~~loi de~~ c à d

$$P(X = i) = \frac{1}{N} \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant N$$

– loi de Poisson de paramètre λ

on dit que X suit ~~une~~ loi de Poisson de paramètre λ

si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$

et P_X est la probabilité de Poisson de paramètre λ

c à d $$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

— loi de Bernoulli de paramètre p

$$X : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$P(X = 1) = p \qquad P(X = 0) = 1 - p$$

— loi binomiale de paramètres n et p

$$X : \Omega \longrightarrow \{0, 1, \quad , n\}$$

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$$

P_X est bien une probabilité car

$$\sum_{k=0}^{n} P_X(\{k\}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\overset{\text{binôme de Newton}}{=} (p + 1 - p)^n = 1$$

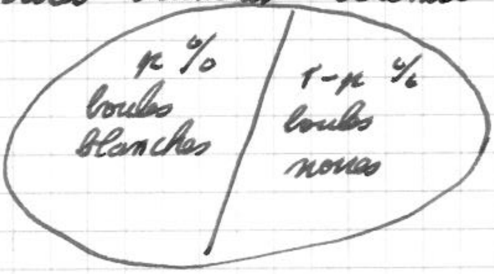
Proposition Considérons une suite de n épreuves indépendantes qui ont chacune une probabilité de succès p et d'échec $1 - p$.

~~Consid~~ ~~Hyp~~ La variable aléatoire obtenue en s'intéressant aux nombres de succès obtenus lors de ces n épreuves suit une loi binomiale de paramètre n et p.

preuve de Proposition à faire en TD

Exemple

tirage (avec remise) de n boules dans une urne contenant un pourcentage p de boules blanches et $1-p$ de boules noires. On s'interesse au nombre de boules blanches obtenus



On peut considerer que tirer une boule dans l'urne est une épreuve qui reussit si la boule est blanche ~~donc d'après la proposition~~

nombre de succes obtenus = nombre de boules blanches obtenus donc d'apres la proposition

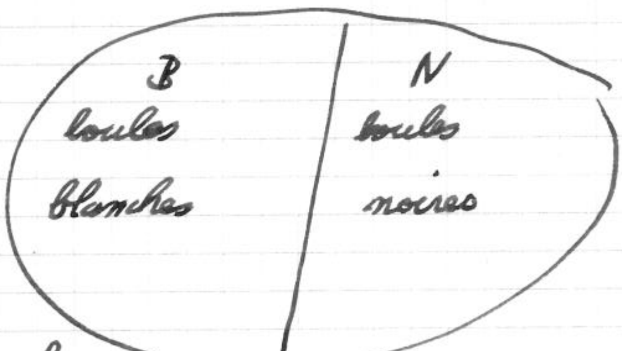
Le nombre de boules blanches suit une loi binomiale de parametre n et p.

fin du Cours Mercredi 21 Mai 2003

- loi hypergeometrique $\mathcal{H}(n, B, N)$

Considerons une urne comportant B boules blanches et N boules noires.

tirage sans remise de n boules. On s'interesse au nombre X de boules blanches obtenus



Pour $0 \leq k \leq n$

$$P(X = k) = \frac{C_B^k \times C_N^{n-k}}{C_{B+N}^n} \quad \text{si } k \leq B \text{ et } n-k \leq N$$

Exo VIII

Considérons que les boules sont numérotées de 1 à $B+N$

Par exemple les boules blanches de 1 à B

noires de $B+1$ à $B+N$

Le résultat possible du tirage de n boules est une partie à n éléments de $\{1, \quad , B+N\}$

Ω = ensemble des parties à n éléments de $\{1, \quad , B+N\}$ $\quad$ card $\Omega = C_{B+N}^{n}$

Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées

Donc tous les tirages sont équiprobables

Ω est donc muni de la probabilité uniforme

$$P\begin{pmatrix}\text{un tirage}\\ \text{donné}\end{pmatrix} = \frac{1}{\text{card } \Omega}$$

$$P\begin{pmatrix}\text{obtenir } k\\ \text{boules blanches}\end{pmatrix} = \frac{\text{nbre de tirages avec } k \text{ boules blanches et donc } n-k \text{ boules noires}}{\text{card } \Omega}$$

$$= \frac{\text{nbre de parties à } n \text{ éléments avec } k \text{ éléments dans } \{1, \quad , B\} \text{ et } n-k \text{ éléments dans } \{B+1, \quad , B+N\}}{\text{card } \Omega}$$

$$= \frac{\text{nbre de parties à } k \text{ éléments de } \{1 \quad , B\} \times \text{nbre de parties à } n-k \text{ éléments de } \{B+1, \quad , B+N\}}{\text{card } \Omega}$$

$$= \frac{C_B^k \, C_N^{n-k}}{C_{B+N}^n}$$

à condition que $k \leqslant B$ (car on ne peut pas tirer plus de boules blanches qu'il n'y en a dans l'urne)

à condition que $n-k \leqslant N$ (car on ne peut pas tirer plus de boules noires qu'il n'y en a dans l'urne)

Preuve de la Proposition

$$\Omega = \{succes\ ,\ echec\}^{\mathbb{N}}$$

et $P(X = k) = 0$ si $k > B$ ou $n-k > N$

Preuve ∮ T.D.

$X : \Omega \longrightarrow \{0, 1, \quad , n\}$

— loi geometrique de parametre p

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$

$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

Proposition

Considerons une suite infinie d'epreuves repetees independantes qui ont chacune une probabilite de succes p.

Soit X ~~...~~ le numero de la 1^{ere} epreuve qui reussi Alors la loi de X est une loi geometri-que de parametre p

P_X est bien une probabilité car

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p =$$

serie geometrique de raison $(1-p)$

$$p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

Preuve de la Proposition à faire en TD.

4°/ Espérance et Variance

Soit $X : \Omega \longrightarrow E = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$

une variable aléatoire discrète

def Si la série de terme général $x_n P(X = x_n)$ converge absolument, on appelle espérance de X ~~notée E(X)~~, sa somme

$$E(X) := \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$$

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance $E(X)$

def ~~Si la variable aléatoire~~ $\cancel{(X - E(X))^2}$

~~admet une espérance, on appelle~~

On appelle variance de X, l'espérance de la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ si elle existe

$$\text{Var}\, X = E\left(X - E(X)\right)^2$$

Soit $Y = (X - E(X))^2$

$X = x_i$ avec une probabilité $P(X = x_i)$

donc $Y = (x_i - E(X))^2$ avec une probabilité $P(X = x_i)$

donc

$$\boxed{\text{Var}\, X = E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \geqslant 0}$$

fin du Cours du Jeudi 22 Mai 2003

Propriété (Admise) $E = \{x_0, x_1, \quad , x_n, \quad \dots\}$

Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application

Soit $Y = f \circ X$ la variable aléatoire discrète égale à la composée de X et de f

Alors $$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\, f(x_n)$$

Proposition Formule de König :

$$\operatorname{Var} X = \sum_{n=0}^{+\infty} x_i^2 P(X = x_i) - E(X)^2$$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

Preuve Voir Lycée ne pas la faire

$$(x_i - E(X))^2 = x_i^2 - 2\, x_i \cdot E(X) + E(X)^2$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_i^2 P(X = x_i)$$

$$- 2 \sum_{n=0}^{+\infty} x_i P(X = x_i) \; E(X) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_i) \, E(X)^2$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} x_i^2 P(X = x_i) - \cancel{2}\, E(X) E(X) + \cancel{P(\Omega) E(X)^2}$$

$\square$

déf écart - type de X

$$\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var} X}$$

autre Preuve $E(X - E(X))^2 = E(X^2 - 2X E(X) + E(X)^2)$

$$= E(X^2) - 2\, E(X E(X)) + E(E(X)^2)$$

$$= E(X^2) - 2\, E(X) E(X) + E(X)^2$$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

qui utilise $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(\lambda X) = \lambda E(X)$ $\lambda \in \mathbb{R}$

En grève Vendredi 6 Février 2009 Mardi 3 Février 2009 Mardi 10 Février 2009

5°/ Inégalité de Bienaymé - Chebyshev

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé

Lemme Inégalité de Markov

Soit $X : \Omega \longrightarrow E \subset \mathbb{R}^+$ une variable aléatoire ~~positive~~ discrète ~~ou~~ à valeurs positives.

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

Alors $P(X \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a} E(X)$

Preuve Considérons la variable aléatoire discrète

$$Y : \Omega \longrightarrow \cancel{\mathbb{R}}\{0, a\} \subset \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto \begin{cases} a & \text{si } X(\omega) \geqslant a \\ 0 & \text{si } X(\omega) < a \end{cases}$$

~~Comme $X \geqslant 0$~~ Comme $X \geqslant 0$,
~~Clairement~~ on a $Y \leqslant X$

donc $E(Y) \leqslant E(X)$

$$E(Y) = 0 \times P(X < a) + a\, P(X \geqslant a)$$

donc $a\, P(X \geqslant a) \leqslant E(X)$ $\square$

fin du Cours Mercredi 19 Mai 2004

Théorème Inégalité de Bienaymé - Chebyshev
Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance alors pour tout réel $a > 0$

on a $P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\operatorname{Var} X}{a^2}$

Preuve On applique l'Inégalité de Markov à la variable aléatoire

$$\left(X - E(X)\right)^2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$\omega \longmapsto \left(X(\omega) - E(X)\right)^2$$

et au réel positif a^2

d'après Markov

$$P\left(\left(X - E(X)\right)^2 \geqslant a^2\right) \leqslant \frac{E\left(X - E(X)\right)^2}{a^2} \qquad \square$$

Interet de Bienaymé - Chebyshev

En connaissant uniquement $E(X)$ et $Var(X)$ on arrive à connaitre en partie, la loi de X.

Exemple La moyenne des notes à un examen est de 10 et la variance est de 9.

La probabilité qu'un étudiant ait une note ~~extreme~~ cad $\leqslant 4$ ou $\geqslant 16$ est inferieur à 0,25

En effet d'après Bienaymé Chebyshev

$$P\left(\left|\text{note} - 10\right| \geqslant 6\right) \leqslant \frac{9}{6^2} = 0{,}25$$

Corollaire la loi faible des grands nombres voir T.D

III Probabilités conditionnelles et indépendances rappel Lycée

Soient A et B deux evenements

def Probabilité conditionnelle de ~~B~~ B sachant ~~A~~ A

$$P(B/A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

def A et B sont independantes

si $P(B) = P(B/A)$

"La realisation de A ne nous renseigne pas sur la réalisation de B"

$$\Longleftrightarrow \quad P(B\cap A) = P(B)\times P(A)$$

⚠ ne pas confondre incompatible et independants !

Formule des Probabilités totales

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω

(c à d une suite d'evenements incompatibles 2 à 2 telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ reunion disjointe)

alors

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B/A_n)\,P(A_n)$$

Formule de Bayes permet de calculer $P(A_n/B)$ connaissant $P(B/A_n)$.

$$P(A_n/B) = \frac{P(B/A_n)\,P(A_n)}{P(B)} = \frac{P(B/A_n)\,P(A_n)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(B/A_n)\,P(A_n)}$$

Preuve ~~[illegible]~~

$$\cancel{P(B_n / A) = \frac{P(B_n \cap A)}{P(A)}} = \cancel{\frac{P(A / B_n)\, P(B_n)}{}}$$

$$P(A_n / B) = \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B / A_n)\; P(A_n)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(B / A_n)\; P(A_n)}$$

$\square$

exo à faire sur Bayes

Dans un élevage de moutons, on décèle 30% d'animaux malades. La probabilité qu'un mouton qui n'est pas malade ait une réaction négative à un test donné est de 0,9. Par contre, s'il est malade la réaction sera positive à 80%.
Quelle est la probabilité qu'un mouton choisi au hasard et ayant une réaction positive au test, soit malade ?

$P(M) = 0,3$ $\quad P(- / \text{non } M) = 0,9$

$P(+ / M) = 0,8$

$$P(M / +) = \frac{P(+ / M)\; P(M)}{P(+)} = \frac{P(+ / M)\; P(M)}{P(+ / M)\, P(M) + P(+ / \text{non } M)\, P(\bar{M})}$$

fin du cours Vendredi 13 Février 2009

IV Etude conjointe de 2 variables aléatoires

1°) Variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

Soient $X : \Omega \longrightarrow E$

et $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables

aléatoires

déf On dit que X et Y sont indépendantes

si $\forall A \subset E$, $\forall B \subset F$,

Les évènements $X \in A$ et $Y \in B$ sont indépendantes

càd $P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$

$= P_X(A)\, P_Y(B)$

Proposition Si X et Y sont des variables aléatoires

discrètes càd

$E = \{x_0, x_1, \quad , x_n, \ldots\ldots\}$

$F = \{y_0, y_1, \quad , y_n, \ldots\ldots, \}$

X et Y sont indépendants

ssi $P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i)\, P(Y = y_j)$

pour tout $i, j \in \mathbb{N}$.

Preuve (Admis) $\Longrightarrow$ clair on prend $A = \{x_i\}$ $\Longleftarrow$ Pb des doubles sommes

$B = \{y_j\}$

2°) Covariance

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé

Soient $X : \Omega \longrightarrow E = \{x_0, x_1, \quad, x_n, \dots\}$

et $Y : \Omega \longrightarrow F = \{y_0, y_1, \quad, y_n, \dots\}$

deux variables aléatoires discrètes admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$

On appelle covariance de X et de Y, l'espérance de la variable aléatoire $(X - E(X)) \times (Y - E(Y))$ si elle existe

$$Cov(X, Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right]$$

Prop 3.3.5 Rossignol

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} (x_i - E(X))(y_j - E(Y)) \, P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} x_i y_j \, \cancel{E(X) E(Y)} \, P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) - E(X) E(Y)$$

$$= E(X Y) - E(X) E(Y)$$

Exemple Si on prend $Y = X$

$$Cov(X, X) = E\left[(X - E(X))(X - E(X))\right] = E(X - E(X))^2$$

$$= Var\, X$$

Si X et Y sont 2 variables aleatoires independantes

Alors $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$

c à d $E(XY) = E(X)\,E(Y)$

Preuve

$$E(XY) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} x_i\, y_j \underbrace{P(X = x_i) \times P(Y = y_j)}_{\text{par independance}}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(x_i\, P(X = x_i) \times \sum_{j=0}^{+\infty} y_j\, P(Y = y_j)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(x_i\, P(X = x_i) \times E(Y)\right) = E(Y) \sum_{i=0}^{+\infty} x_i\, P(X = x_i)$$

$$= E(Y)\,E(X) \qquad \square$$

Soient X et Y deux variables aleatoires quelconques

$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y + 2\operatorname{cov}(X, Y)$$

Preuve à faire en TD

$$\operatorname{Var}(X+Y) = E\left[\left(X+Y - E(X+Y)\right)^2\right]$$

Comme $\left(X+Y - E(X+Y)\right)^2 = \left[X+Y-\left(E(X)+E(Y)\right)\right]^2$

$$= \left[\left(X - E(X)\right) + \left(Y - E(Y)\right)\right]^2 =$$

$$= \left(X - E(X)\right)^2 + \left(Y - E(Y)\right)^2 + 2\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right),$$

on a

$$Var(X+Y) = E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right] + E\left[\left(Y-E(Y)\right)^2\right]$$
$$+ \ 2\ E\left[\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)\right]$$
$$= Var\ X + Var\ Y + Cov(X, Y) \qquad \square$$

Si $X_1, X_2, \qquad , X_n$ sont n variables aleatoires independantes 2 à 2

$$Var(X_1 + \qquad + X_n) = Var\ X_1 + \qquad + Var\ X_n$$

Application En prenant $X_1, \qquad , X_n$ n variables aleatoires independantes qui suivent une loi de Bernoulli de parametre p, on en deduit que
si une variable aleatoire Y suit une loi Binomiale de paramètre n et p alors

$$Var\ Y = n\,p(1-p)$$

fin du cours Vendredi 27 Fevrier 2009