

Corrige L2 Proba - Stats

1^{ère} session 2009-10

Exercice 1 C'est un exemple traité en cours
(fin du chapitre 3)

Soit X le nombre d'arbustes sur la parcelle

$$(1) \quad P(X=0) = (0,15)^{2000}$$

$$(2) \quad P(X=1) = 2000 \times 0,85 \times (0,15)^{1999}$$

(3) X suit une loi binomiale de paramètres $n=2000$ et $p=0,85$. Car on peut considérer que le fait qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas d'arbustes dans un carré unité est une épreuve.

Ces épreuves sont bien indépendantes.

X est bien égal au nombre d'épreuves qui réussissent.

$$P(X=k) = \binom{2000}{k} 0,85^k (0,15)^{2000-k}$$

$$(4) \quad \text{nombre moyen d'arbustes } E(X) = np = 2000 \times 0,85 = 1700$$

$$(5) \text{ Var } X = np(1-p) = 2000 \times 0,85 \times 0,15$$

(2)

$$\text{donc } \sigma_X \approx 16$$

$$(6) P(1684 \leq X \leq 1716) = P(|X - 1700| \leq 16) \\ = 1 - P(|X - 1700| \geq 17)$$

Le lemme-Tchebychev donne

$$P(|X - 1700| \geq 17) \leq \frac{\text{Var } X}{17^2} = \frac{16^2}{17^2}$$

$$\text{donc } P(1684 \leq X \leq 1716) \geq 1 - \frac{16^2}{17^2} = 0,11$$

Cette minoration n'est pas très utile !

$$(7) \text{ Ici } n \text{ est grand } 900 \gg 30$$

$$p = 0,85$$

et $1-p = 0,15$ ne sont pas petits

donc on peut considérer que X suit une loi

normale $N(1700, 16)$. Avec la correction de continuité

$$P(1684 \leq X \leq 1716) = P(1683,5 \leq X \leq 1716,5) \\ = P\left(\frac{1683,5 - 1700}{16} \leq \frac{X - 1700}{16} \leq \frac{1716,5 - 1700}{16}\right) \\ = P(-1,03 \leq \frac{X - 1700}{16} \leq 1,03) \\ = F_N(1,03) - F_N(-1,03) \\ = 0,8485 - (1 - 0,8485) = 0,697$$

Si on n'approxime pas, calcul horrible !

Exercice 2

(3)

$$a) \bar{x}_m = \frac{31 \times 1 + 42 \times 2 + 86 \times 3 + 151 \times 4 + 197 \times 5 + 167 \times 6 + 107 \times 7 + 65 \times 8 + 32 \times 9 + 18 \times 10}{900} \times \frac{1000}{900}$$

$$= 5232$$

$$b) s_m^2 = \frac{31 \times 1^2 + 42 \times 2^2 + 86 \times 3^2 + 151 \times 4^2 + 197 \times 5^2 + 167 \times 6^2 + 107 \times 7^2 + 65 \times 8^2 + 32 \times 9^2 + 18 \times 10^2}{900} - 5232^2 = 3889509$$

$$s_m^2 = \frac{n}{n-1} 3889509 = \frac{900}{899} 3889509 = 3893835$$

donc estimateur sans biais = 1973

$$c) \text{Soit } T = \frac{Y - 5232}{1973}$$

T suit une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$

$$\frac{1500 - 5232}{1973} = -1,89$$

$$\text{donc } p_1 = P(T < -1,89) = 1 - P(T < 1,89) = 1 - 0,9706 = 0,0294$$

$$\frac{2500 - 5232}{1973} = -1,38$$

(4)

$$\begin{aligned}
 \mu_2 &= P(-1,89 < T \leq -1,38) \\
 &= P(T \leq -1,38) - P(T \leq -1,89) \\
 &= 1 - P(T \leq 1,38) - 1 + P(T \leq 1,89) \\
 &= P(T \leq 1,89) - P(T \leq 1,38) \\
 &= 0,9706 - 0,9162 = 0,0544
 \end{aligned}$$

$$\frac{3500 - 5232}{1973} = -0,88$$

$$\begin{aligned}
 \mu_3 &= P(-1,38 < T \leq -0,88) \\
 &= P(T \leq 1,38) - P(T \leq 0,88) \\
 &= 0,9162 - 0,8106 = 0,1056
 \end{aligned}$$

$$\frac{4500 - 5232}{1973} = -0,37$$

$$\begin{aligned}
 \mu_4 &= P(T \leq 0,88) - P(T \leq 0,37) \\
 &= 0,8106 - 0,6443 = 0,1663
 \end{aligned}$$

$$\frac{5500 - 5232}{1973} = 0,14$$

$$\begin{aligned}
 \mu_5 &= P(T \leq 0,14) - P(T \leq -0,37) \\
 &= P(T \leq 0,14) - 1 + P(T \leq 0,37) \\
 &= 0,5557 - 1 + 0,6443 = 0,2
 \end{aligned}$$

$$\frac{6500 - 5232}{1973} = 0,64$$

(5)

$$\begin{aligned} \mu_6 &= P(T \leq 0,64) - P(T \leq 0,14) \\ &= 0,7389 - 0,5557 = 0,1832 \end{aligned}$$

$$\frac{7500 - 5232}{1973} = 1,15$$

$$\begin{aligned} \mu_7 &= P(T \leq 1,15) - P(T \leq 0,64) \\ &= 0,8749 - 0,7389 = 0,136 \end{aligned}$$

$$\frac{8500 - 5232}{1973} = 1,66$$

$$\begin{aligned} \mu_8 &= P(T \leq 1,66) - P(T \leq 1,15) \\ &= 0,9515 - 0,8749 = 0,0766 \end{aligned}$$

$$\frac{9500 - 5232}{1973} = 2,16$$

$$\begin{aligned} \mu_9 &= P(T \leq 2,16) - P(T \leq 1,66) \\ &= 0,9846 - 0,9515 = 0,0331 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{10} &= P(T \geq 2,16) = 1 - P(T \leq 2,16) \\ &= 1 - 0,9846 = 0,0154 \end{aligned}$$

d)

(6)

Classes	effectifs n_i	p_i	np_i
1	31	0,0294	26
2	46	0,0544	49
3	86	0,1056	95
4	151	0,1663	150
5	197	0,2	180
6	167	0,1832	165
7	107	0,136	122
8	65	0,0766	69
9	32	0,0331	30
10	18	0,0154	14

$$\begin{aligned} \chi_c^2 &= \frac{(31-26)^2}{26} + \frac{(46-49)^2}{49} + \frac{(86-95)^2}{95} \\ &+ \frac{(151-150)^2}{150} + \frac{(197-180)^2}{180} + \frac{(167-165)^2}{165} \\ &+ \frac{(107-122)^2}{122} + \frac{(65-69)^2}{69} + \frac{(32-30)^2}{30} \\ &+ \frac{(18-14)^2}{14} = 6,99 \end{aligned}$$

e) d'après la table du χ^2 à $10 - 1 - 2 = 7$ degrés de liberté

$$P(\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2) = 0,05 \quad \chi_{\alpha}^2 = 14,07$$

donc comme $\chi_c^2 = 6,99 < 14,07 = \chi_{\alpha}^2$

on ne peut pas rejeter l'hypothèse que X suit une loi normale.