Université d'Angers **P8-P9 2023-24**
L2 Math, DL Math-Eco & DL Math-Info **Diagonalisation - P9**
Luc Menichi & Gilles Stupfler

Fiche d'exercices 2 - Diagonalisation

Exercice 1 : Homothétie

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. On suppose que tout $x \in E$ est un vecteur propre de f. Montrer que f est une homothétie.

Solution: Par hypothèse, pour tout $x \in E$ non nul, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Soient $x, y \in E$ non nuls ; l'objectif est de montrer que $\lambda_x = \lambda_y$. Deux cas sont possibles. Si (x, y) est liée, alors $y = \mu x$ pour un certain $\mu \in \mathbb{K}$ non nul, donc $\mu\lambda_y x = \lambda_y y = f(y) = \mu f(x) = \mu\lambda_x x$, soit $\lambda_x = \lambda_y$. Si (x, y) est libre, alors $\lambda_{x+y}(x+y) = f(x+y) = f(x)+f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$, d'où on tire $\lambda_{x+y} = \lambda_x$ et $\lambda_{x+y} = \lambda_y$ par liberté de la famille et ainsi $\lambda_x = \lambda_y$.

Exercice 2 : La dérivation comme endomorphisme en dimension finie

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$, où $n \geq 1$. Soit $D : E \to E$ défini par $D(P) = P'$ où P' est le polynôme dérivé de P.

(a) Montrer que D est un endomorphisme de E.

(b) Donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

(c) D est-il diagonalisable ?

(d) Montrer que D est nilpotent d'ordre $n+1$, c'est-à-dire que $D^{n+1} = 0$ et $D^n \neq 0$. Retrouver le résultat de la question précédente.

Solution:

(a) Evidemment $D(E) \subset E$, puisque dériver un polynôme fait diminuer son degré. Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$, s'écrivant

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

pour $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ réels. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P + \lambda Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + \lambda b_k) X^k.$$

Par conséquent

$$(P + \lambda Q)' = \sum_{k=1}^{n} k(a_k + \lambda b_k) X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} + \lambda \sum_{k=1}^{n} k b_k X^{k-1} = P' + \lambda Q'$$

ce qui montre bien la linéarité de D.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit P un polynôme à coefficients réels, non nul, de degré $d \leq n$. Alors $D(P) = \lambda P \Leftrightarrow P' = \lambda P$. Le degré du polynôme P' est égal à $d - 1$, si P est non constant, et $-\infty$ sinon. Si $\lambda \neq 0$, alors λP est de degré $d \geq 0$, donc on ne peut pas avoir $D(P) = \lambda P$. Si $\lambda = 0$, l'équation devient $P' = 0$, soit $P = c$ avec c un réel non nul. On en déduit que D a pour valeur propre 0 uniquement, avec pour vecteurs propres correspondants les polynômes constants non nuls.

(c) Il s'ensuit que l'unique sous-espace propre de D est $\ker(D)$, de dimension 1. Puisque E est de dimension $n+1 \geq 2$, D n'est pas diagonalisable.

(d) L'endomorphisme D^{n+1} correspond à prendre la dérivée $(n+1)-$ième d'un polynôme de degré n, donc D^{n+1} appliqué à tout élément de E est nul, c'est-à-dire que $D^{n+1} = 0$. Ensuite, si $P = X^n$, on a $D^n(P) = n! \neq 0$, donc $D^n \neq 0$. Si D était diagonalisable, alors, puisque D est nilpotent et donc n'a que 0 comme valeur propre, D serait nul, mais $D^n \neq 0$, ce qui représente une contradiction.

Exercice 3 : Le même... mais en dimension infinie

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables. Soit $D : E \to E$ défini par $D(f) = f'$ où f' est la dérivée de f.

(a) Montrer que D est linéaire.

(b) Donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

(c) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ p réels distincts. Montrer que la famille d'applications $(f_i : x \mapsto \exp(\lambda_i x))_{1 \leq i \leq p}$ est libre.

Solution:

(a) Soient f et g deux applications indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Soient α et β deux réels. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\alpha f + \beta g$ est dérivable en x, de dérivée $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$. Donc

$$D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha D(f) + \beta D(g).$$

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit f une application indéfiniment dérivable. Alors $D(f) = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \alpha f(x)$. Autrement dit, $D(f) = \lambda f$ si et seulement f est solution de l'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants $y' - \alpha y = 0$. Il s'ensuit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C \exp(\alpha x)$. Donc tout réel α est une valeur propre de D, et f est un vecteur propre de D associé à la valeur propre α si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C \exp(\alpha x)$ où $C \in \mathbb{R}$.

(c) Première solution : soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 \exp(\lambda_1 x) + \cdots + \alpha_p \exp(\lambda_p x) = 0.$$

Maintenant, puisque $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de D, la somme $\ker(D - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) + \cdots + \ker(D - \lambda_p \mathrm{Id}_E)$ est directe, et pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, chaque fonction $x \mapsto \exp(\lambda_i x)$ appartient à $\ker(D - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$. Il s'ensuit que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\alpha_i = 0$, et donc la famille $(x \mapsto \exp(\lambda_i x))_{1 \leq i \leq p}$ est libre.

Deuxième solution (équivalente !) : puisque $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de D, la somme $\ker(D - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) + \cdots + \ker(D - \lambda_p \mathrm{Id}_E)$ est directe, et pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $(x \mapsto \exp(\lambda_i x))$ est une base de $\ker(D - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$. La famille $(x \mapsto \exp(\lambda_i x))_{1 \leq i \leq p}$, réunion de ces familles libres de sous-espaces vectoriels en somme directe, est donc libre.

Troisième solution (élémentaire) : quitte à réordonner les λ_i, on peut supposer que $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 \exp(\lambda_1 x) + \cdots + \alpha_p \exp(\lambda_p x) = 0.$$

De ceci on déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 + \alpha_2 \exp((\lambda_2 - \lambda_1)x) + \cdots + \alpha_p \exp((\lambda_p - \lambda_1)x) = 0.$$

En faisant $x \to +\infty$, on trouve $\alpha_1 = 0$, puis, par récurrence immédiate, $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, et donc la liberté de la famille $(x \mapsto \exp(\lambda_i x))_{1 \leq i \leq p}$.

Exercice 4 : L'opérateur décalage

Soit $E := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $D : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui à toute suite (u_n) fait correspondre la suite (v_n) telle que $v_n = u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

(a) Montrer que D est linéaire.

(b) Donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

(c) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ p éléments de $\mathbb{K}$ distincts et non nuls. Montrer que la famille des suites géométriques $(\lambda_i^n)_{1 \leq i \leq p}$ est libre sur $\mathbb{K}$.

Solution:

(a) Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soient α et β deux réels. Alors l'image par D de la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ est la suite ayant pour $n-$ième terme $\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}$, de sorte qu'on a bien

$$D(\alpha(u_n) + \beta(v_n)) = \alpha D((u_n)) + \beta D((v_n))$$

et donc D est linéaire.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, et soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors $D((u_n)) = \lambda(u_n) \Leftrightarrow \forall n \geq 0, u_{n+1} = \lambda u_n$. Autrement dit, $D((u_n)) = \lambda(u_n)$ si et seulement si (u_n) est nulle pour tout $n \geq 1$, dans le cas $\lambda = 0$, ou si (u_n) est géométrique de raison λ, lorsque $\lambda \neq 0$. Il s'ensuit que tout $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de D, avec vecteurs propres associés les suites géométriques non nulles de raison λ lorsque $\lambda \neq 0$, et les suites identiquement nulles à l'exception de leur premier élément lorsque $\lambda = 0$.

(c) Première solution : soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 \lambda_1^n + \cdots + \alpha_p \lambda_p^n = 0$. Les suites $(\lambda_1^n), \ldots, (\lambda_p^n)$ appartiennent respectivement aux sous-espaces propres $\ker(D - \lambda_1 \mathrm{Id}_E), \ldots, \ker(D - \lambda_p \mathrm{Id}_E)$. On sait donc que la somme $\ker(D - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) + \cdots + \ker(D - \lambda_p \mathrm{Id}_E)$ est directe, et par conséquent, $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. Il s'ensuit que la famille $((\lambda_i^n))_{1 \leq i \leq p}$ est libre.

Deuxième solution (équivalente !) : puisque $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de D, la somme $\ker(D - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) + \cdots + \ker(D - \lambda_p \mathrm{Id}_E)$ est directe, et pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, (λ_i^n) est une base de $\ker(D - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$. La famille $((\lambda_i^n))_{1 \leq i \leq p}$, réunion de ces familles libres de sous-espaces vectoriels en somme directe, est donc libre.

Exercice 5 : Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon

Soit $P(X) = X^q + \alpha_{q-1} X^{q-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$ un polynôme unitaire de degré q. Considérons la matrice carrée à q lignes appelée *matrice compagnon*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{q-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que χ_M, le polynôme caractéristique de M, est égal à P.

Solution: Première solution : par récurrence sur q. Supposons le résultat de l'exercice vrai pour des polynômes unitaires de degré $q-1$. On a

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & X & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & X+\alpha_{q-1} \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne,

$$\chi_M(X) = X \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ -1 & X & \dots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \alpha_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & X+\alpha_{q-1} \end{vmatrix} + (-1)^{q-1}\alpha_0 \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= X(X^{q-1} + \alpha_{q-1}X^{q-2} + \dots + \alpha_1) + (-1)^{q-1} \times (-1)^{q-1}\alpha_0 \\ &= X^q + \alpha_{q-1}X^{q-1} + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0 = P(X). \end{aligned}$$

Deuxième solution : en développant directement par rapport à la dernière colonne, le mineur associé au coefficient $(-1)^{q+1+j}\alpha_j$, pour $j \leq q-2$, est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure, comptant j fois X et $q-1-j$ fois (-1) sur la diagonale, donc égal à $(-1)^{q-1-j}X^j$. Le produit du coefficient par le mineur est donc $\alpha_j X^j$. Le mineur associé au dernier terme de ce développement, qui est $X + \alpha_{q-1}$, est X^{q-1}, donc on trouve

$$\chi_M(X) = X^{q-1}(X + \alpha_{q-1}) + \alpha_{q-2}X^{q-2} + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0 = P(X).$$

Exercice 6 : En dimension 2

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K}).$$

On pose $\Delta = (a-d)^2 + 4bc$.

(a) On se place ici dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\Delta > 0$ ou si $b = c = 0$ et $a = d$.

(b) On se place ici dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si et seulement si $\Delta \neq 0$ ou si $b = c = 0$ et $a = d$.

(c) Application : montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

(dont on discutera l'interprétation géométrique) est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Solution: Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \det(X\mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = (X-a)(X-d) - bc = X^2 - (a+d)X + ad - bc.$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc = \Delta.$$

(a) Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et si $\Delta > 0$, le polynôme χ_A a deux racines réelles distinctes, donc A, qui est une matrice réelle de dimension 2, a deux valeurs propres sur $\mathbb{R}$, chacune de multiplicité 1 en dimension 2, ce qui implique que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Lorsque $\Delta < 0$, le polynôme χ_A n'a aucune racine réelle, donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Enfin, lorsque $\Delta = 0$, le polynôme χ_A a une unique racine réelle, de multiplicité 2, disons λ. Si A est diagonalisable, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} = P(\lambda \mathrm{I}_2)P^{-1} = \lambda \mathrm{I}_2.$$

On en conclut que dans ce cas, nécessairement $b = c = 0$ et $a = d = \lambda$. Réciproquement, tout multiple de l'identité est évidemment diagonalisable, puisque diagonale.

(b) Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et si $\Delta \neq 0$, le polynôme χ_A a deux racines complexes distinctes, donc A, qui est une matrice complexe de dimension 2, a deux valeurs propres sur $\mathbb{C}$, chacune de multiplicité 1 en dimension 2, ce qui implique que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Comme à la question précédente, lorsque $\Delta = 0$, le polynôme χ_A a une unique racine complexe, de multiplicité 2, de sorte que A est diagonalisable si et seulement si elle est diagonale.

(c) Ici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$$

avec $a = d = 0$ et $b = -c = -1$. On a donc $(a-d)^2 + 4bc = -4 < 0$, ce qui implique que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$. [L'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est une rotation d'angle $\pi/2$, qui est un cas particulier de *quart de tour*.]

Exercice 7 : En dimension 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -15 & 10 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de A et donner une base de chacun d'eux.

(c) A est-elle diagonalisable ? Si oui, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution:

(a) On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 15 & -10 \\ 1 & X-4 & 1 \\ 1 & -5 & X+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-2 & 15 & -10 \\ 1 & X-4 & 1 \\ 0 & -X-1 & X \end{vmatrix}$$

en faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, puis

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 15 & -X-8 \\ 1 & X-4 & 0 \\ 0 & -X-1 & X \end{vmatrix}$$

en faisant $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$. En développant selon la première colonne, on trouve

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= X(X-2)(X-4) - 15X + (X+1)(X+8) \\ &= X(X-2)(X-4) + X^2 - 6X + 8 \\ &= X(X-2)(X-4) + (X-2)(X-4) = (X+1)(X-2)(X-4). \end{aligned}$$

(b) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique χ_A, donc A a pour valeurs propres -1, 2 et 4. Puisqu'il y a trois valeurs propres et que A est de taille 3, les sous-espaces propres de A, qui sont $\ker(A + \mathrm{I}_3)$, $\ker(A - 2\mathrm{I}_3)$ et $\ker(A - 4\mathrm{I}_3)$, sont tous de dimension 1. Rechercher une base de chacun d'entre eux revient donc à en donner un vecteur non nul. On a

$$A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -15 & 10 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières colonnes de $A + \mathrm{I}_3$ sont proportionnelles (avec le coefficient -5) donc

$$(A + \mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on déduit qu'une base de $\ker(A + \mathrm{I}_3)$ est le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ensuite,

$$A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 10 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ici

$$(A - 2\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 10 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une base de $\ker(A - 2\mathrm{I}_3)$ est donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Enfin,

$$A - 4\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 10 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

On a

$$(A - 4\mathrm{I}_3) \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 10 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une base de $\ker(A - 4\mathrm{I}_3)$ est donc le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

(c) Puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est 3, A est diagonalisable (on pouvait aussi remarquer que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable). D'après la question précédente, une base de diagonalisation est

$$\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \right).$$

La matrice de passage de la base dans laquelle la matrice A est écrite à cette nouvelle base est donc

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de cette matrice (en résolvant un système linéaire, ou avec $P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t\mathrm{com}(P)$...) est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/15 & 2/3 & -7/15 \\ 1/6 & -5/6 & 5/6 \\ 1/10 & -1/2 & 3/10 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$A = PDP^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\forall n \geq 1,\ A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Après calculs, pour tout $n \geq 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^{n-1}}{3} + 2^{2n-1} & \frac{10}{3} \times (-1)^n - \frac{5}{3} \times 2^{n-1} - 5 \times 2^{2n-1} & \frac{7}{3} \times (-1)^{n+1} + \frac{5}{3} \times 2^{n-1} + 3 \times 2^{2n-1} \\ \frac{(-1)^n}{15} + \frac{2^n}{3} - \frac{2^{2n+1}}{5} & \frac{2}{3} \times (-1)^n - \frac{5}{3} \times 2^n + 2^{2n+1} & \frac{7}{15} \times (-1)^{n+1} + \frac{5}{3} \times 2^n - \frac{3}{5} \times 2^{2n+1} \\ 2^{n-1}(1 - 2^n) & 5 \times 2^{n-1}(2^n - 1) & 2^{n-1}(5 - 3 \times 2^n) \end{pmatrix}$$

Exercice 8 : En dimension 3, encore

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de A et donner une base de chacun d'eux.

(c) A est-elle diagonalisable ? Si oui, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution:

(a) On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -3 & 2 \\ 1 & X-4 & 1 \\ 1 & -5 & X+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-2 & -3 & 2 \\ 1 & X-4 & 1 \\ 0 & -X-1 & X \end{vmatrix}$$

en faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, puis

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -3 & -X+4 \\ 1 & X-4 & 0 \\ 0 & -X-1 & X \end{vmatrix}$$

en faisant $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$. En développant selon la première colonne, on trouve

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= X(X-2)(X-4) + 3X - (X+1)(4-X) \\ &= X(X-2)(X-4) + (X-2)(X+2) \\ &= (X-2)(X^2-3X+2) = (X-1)(X-2)^2. \end{aligned}$$

(b) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique χ_A, donc A a pour valeurs propres 1 et 2. Les sous-espaces propres de A sont donc $\ker(A - \mathrm{I}_3)$ et $\ker(A - 2\mathrm{I}_3)$. On a, d'une part,

$$A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas de rang 3, puisqu'elle n'est pas inversible, et est de rang > 1, puisque ses colonnes ne sont pas proportionnelles. Elle est donc de rang 2, ce qui signifie que son noyau est de dimension 1. Puisque

$$(A - \mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on déduit qu'une base de $\ker(A - \mathrm{I}_3)$ est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ensuite,

$$A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est à nouveau de rang 2, donc son noyau est de dimension 1, et

$$(A - 2\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\-1 & 2 & -1\\-1 & 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ceci veut dire qu'une base de $\ker(A - 2\mathrm{I}_3)$ est le vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

(c) Puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est 2, et que la dimension de l'espace vectoriel sur lequel est défini l'endomorphisme dont A est la matrice est 3, A n'est pas diagonalisable.

Exercice 9 : Une première application aux suites récurrentes

Dans une zone de nidification d'une espèce d'oiseaux marins qui est constituée de trois îles on observe :

- parmi ceux qui ont nidifié une année dans l'île A, l'année suivante, 70% nidifieront encore dans l'île A, 20% nidifieront dans l'île B, et 10% nidifieront dans l'île C.
- parmi ceux qui ont nidifié une année dans l'île B, l'année suivante, 60% nidifieront encore dans l'île B, 20% nidifieront dans l'île A et 20% nidifieront dans l'île C.
- parmi ceux qui ont nidifié une année dans l'île C, l'année suivante, 50% nidifieront encore dans l'île C, 20% nidifieront dans l'île A et 30% nidifieront dans l'île B.

On suppose que le nombre d'oiseaux reste constant au cours du temps.

(a) Quelle est l'ultime répartition (si elle existe) dans les différentes zones de nidification ?

(b) Quelle est la répartition dans les différentes zones de nidification au bout de n années en fonction d'une répartition initiale A_0, B_0 et C_0 ? Retrouver l'ultime répartition en faisant tendre n vers $+\infty$.

Solution:

(a) Notons A_n (respectivement B_n, C_n) le nombre d'oiseaux ayant nidifié dans l'île A (respectivement B, C) l'année n. La traduction des données de l'énoncé donne

$$\begin{pmatrix}A_{n+1}\\B_{n+1}\\C_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7/10 & 2/10 & 2/10\\2/10 & 6/10 & 3/10\\1/10 & 2/10 & 5/10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_n\\B_n\\C_n\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}A_n\\B_n\\C_n\end{pmatrix}.$$

La répartition ultime (si elle existe !) est celle, notée (a, b, c), telle que d'une année sur l'autre, la répartition des oiseaux ne change pas, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \text{ avec } a + b + c = N$$

où N est le nombre total d'oiseaux, constant dans la population. En d'autres termes, cette répartition est un vecteur propre de M pour la valeur propre 1. On a

$$M - \mathrm{I}_3 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\2 & -4 & 3\\1 & 2 & -5\end{pmatrix}.$$

En résolvant

$$(M-\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-3&2&2\\2&-4&3\\1&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

on trouve que $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}14\\13\\8\end{pmatrix}$. Puisque $a+b+c=\alpha(14+13+8)=N$, on trouve $\alpha=1/35$ et donc $a=14N/35=2N/5$, et l'ultime répartition est ainsi

$$\begin{pmatrix}2N/5\\13N/35\\8N/35\end{pmatrix}.$$

On remarque que la répartition ultime ne dépend pas de la répartition initiale.

(b) On a vu à la première question que

$$\begin{pmatrix}A_{n+1}\\B_{n+1}\\C_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/10&2/10&2/10\\2/10&6/10&3/10\\1/10&2/10&5/10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_n\\B_n\\C_n\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}A_n\\B_n\\C_n\end{pmatrix}$$

ce qui donne, par récurrence immédiate,

$$\begin{pmatrix}A_n\\B_n\\C_n\end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix}A_0\\B_0\\C_0\end{pmatrix}.$$

Il suffit donc de calculer M^n, et on va pour cela diagonaliser M. Pour alléger les calculs, il suffit (et on va le faire) de considérer $B=10M$. On sait d'après la première question que B admet 10 comme valeur propre. Donc le polynôme caractéristique de B va être factorisable par $(X-10)$, ce qu'on retrouve en sommant les lignes du déterminant $\det(X\mathrm{I}_3-B)$:

$$\chi_B(X)=\begin{vmatrix}X-7&-2&-2\\-2&X-6&-3\\-1&-2&X-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}X-10&X-10&X-10\\-2&X-6&-3\\-1&-2&X-5\end{vmatrix}$$

en faisant $L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3$. Par conséquent

$$\chi_B(X)=(X-10)\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&X-6&-3\\-1&-2&X-5\end{vmatrix}=(X-10)\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&X-4&-1\\-1&-1&X-4\end{vmatrix}$$

en faisant $C_2\leftarrow C_2-C_1$ et $C_3\leftarrow C_3-C_1$. En développant par rapport à la première ligne,

$$\chi_B(X)=(X-10)\begin{vmatrix}X-4&-1\\-1&X-4\end{vmatrix}=(X-10)\left((X-4)^2-1^2\right)$$

soit $\chi_B(X)=(X-10)(X-5)(X-3)$. La matrice B est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$, puisque son polynôme caractéristique y est scindé à racines simples, et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1. On a

$$B-3\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&3&3\\1&2&2\end{pmatrix}.$$

Les deux dernières colonnes de cette matrice sont égales, donc

$$(B - 3\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

On en déduit qu'une base de $\ker(B - 3\mathrm{I}_3)$ est $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. Ensuite,

$$B - 5\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\2 & 1 & 3\\1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

et donc

$$(B - 5\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Une base de $\ker(B - 5\mathrm{I}_3)$ est donc $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$. Enfin, on a vu à la première question que

$$(B - 10\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix}14\\13\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Une base de $\ker(B - 10\mathrm{I}_3)$ est donc $\begin{pmatrix}14\\13\\8\end{pmatrix}$. Une base de diagonalisation de B est alors

$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}14\\13\\8\end{pmatrix}\right).$$

La matrice de passage de la base dans laquelle la matrice B est écrite à cette nouvelle base est donc

$$P = \begin{pmatrix}0 & -2 & 14\\1 & 1 & 13\\-1 & 1 & 8\end{pmatrix}.$$

L'inverse de cette matrice est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}-1/14 & 3/7 & -4/7\\-3/10 & 1/5 & 1/5\\1/35 & 1/35 & 1/35\end{pmatrix}.$$

Soit $D := \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 10\end{pmatrix}$ de sorte que $B = PDP^{-1}$. Alors $PD^n = \begin{pmatrix}0 & -2\times 5^n & 14\times 10^n\\3^n & 5^n & 13\times 10^n\\-3^n & 5^n & 8\times 10^n\end{pmatrix}$.

Donc

$$M^n = \frac{1}{10^n}PD^nP^{-1} = \frac{1}{70\times 10^n}\times$$

$$\begin{pmatrix} 42\times 5^n+28\times 10^n & -28\times 5^n+28\times 10^n & -28\times 5^n+28\times 10^n \\ -5\times 3^n-21\times 5^n+26\times 10^n & 30\times 3^n+14\times 5^n+26\times 10^n & -40\times 3^n+14\times 5^n+26\times 10^n \\ 5\times 3^n-21\times 5^n+16\times 10^n & -30\times 3^n+14\times 5^n+16\times 10^n & 40\times 3^n+14\times 5^n+16\times 10^n \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{70\times 10^n}[(42\times 5^n+28\times 10^n)A_0 \\ &\quad +(-28\times 5^n+28\times 10^n)B_0+(-28\times 5^n+28\times 10^n)C_0], \\ B_n &= \frac{1}{70\times 10^n}[(-5\times 3^n-21\times 5^n+26\times 10^n)A_0 \\ &\quad +(30\times 3^n+14\times 5^n+26\times 10^n)B_0+(-40\times 3^n+14\times 5^n+26\times 10^n)C_0], \\ C_n &= \frac{1}{70\times 10^n}[(5\times 3^n-21\times 5^n+16\times 10^n)A_0 \\ &\quad +(-30\times 3^n+14\times 5^n+16\times 10^n)B_0+(40\times 3^n+14\times 5^n+16\times 10^n)C_0]. \end{aligned}$$

Ainsi,

— la suite A_n converge vers $\frac{28}{70}A_0+\frac{28}{70}B_0+\frac{28}{70}C_0=\frac{2}{5}N$,

— la suite B_n converge vers $\frac{26}{70}A_0+\frac{26}{70}B_0+\frac{26}{70}C_0=\frac{13}{35}N$,

— la suite C_n converge vers $\frac{16}{70}A_0+\frac{16}{70}B_0+\frac{16}{70}C_0=\frac{8}{35}N$.

On a donc montré qu'il existe bien une répartition ultime, et on l'a retrouvée.

Notons que si on avait uniquement voulu retrouver l'ultime répartition, on aurait pu raisonner directement sur M, plutôt que sur B, et écrire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} &= M^n \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 14 \\ 1 & 1 & 13 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3/10)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/14 & 3/7 & -4/7 \\ -3/10 & 1/5 & 1/5 \\ 1/35 & 1/35 & 1/35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 14 \\ 1 & 1 & 13 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/14 & 3/7 & -4/7 \\ -3/10 & 1/5 & 1/5 \\ 1/35 & 1/35 & 1/35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & 2/5 \\ 13/35 & 13/35 & 13/35 \\ 8/35 & 8/35 & 8/35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2N/5 \\ 13N/5 \\ 8N/35 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puisque $N=A_0+B_0+C_0$.

Exercice 10 : Diagonalisation d'une matrice complexe

Soit

$$A=\begin{pmatrix} 1-it & 0 & 2it & 0 \\ 0 & 1-it & 2it & 0 \\ 0 & 0 & 1+it & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+it \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}), \text{ avec } t \text{ réel non nul.}$$

Montrer que A est diagonalisable, puis calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution: Soient $\lambda = 1 + it \in \mathbb{C}$ et $\overline{\lambda} = 1 - it$ son conjugué, qui sont distincts, puisque $t \neq 0$. Comme A est une matrice triangulaire à diagonale formée du coefficient λ et $\overline{\lambda}$, chacun deux fois, le polynôme caractéristique de A vaut $\chi_A(X) = (X - \overline{\lambda})^2(X - \lambda)^2$. Donc $\overline{\lambda}$ et λ sont deux valeurs propres distinctes de A, chacune de multiplicité 2.

Notons e_i le $i-$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^4$. La famille (e_1, e_2) est clairement une famille libre dans $\ker(A - \overline{\lambda}\mathrm{I}_4)$, donc (puisque $\overline{\lambda}$ est de multiplicité 2), nécessairement $\ker(A - \overline{\lambda}\mathrm{I}_4)$ est de dimension 2, avec pour base (e_1, e_2).

Par ailleurs

$$A - \lambda\mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} -2it & 0 & 2it & 0 \\ 0 & -2it & 2it & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc la famille $(e_1 + e_2 + e_3, e_4)$ est clairement une famille libre dans $\ker(A - \lambda\mathrm{I}_4)$. A nouveau, puisque λ est de multiplicité 2, nécessairement $\ker(A - \lambda\mathrm{I}_4)$ est de dimension 2, avec pour base $(e_1 + e_2 + e_3, e_4)$. Il s'ensuit que $(e_1, e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_4)$ est une base de vecteurs propres de f, et f est diagonalisable.

Si $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4$ est un vecteur de $\mathbb{C}^4$, on a bien sûr

$$u = (x - z)e_1 + (y - z)e_2 + z(e_1 + e_2 + e_3) + we_4.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f^n(u) &= \overline{\lambda}^n(x - z)e_1 + \overline{\lambda}^n(y - z)e_2 + \lambda^n z(e_1 + e_2 + e_3) + \lambda^n we_4 \\ &= (\overline{\lambda}^n x + (\lambda^n - \overline{\lambda}^n)z)e_1 + (\overline{\lambda}^n y + (\lambda^n - \overline{\lambda}^n)z)e_2 + \lambda^n ze_3 + \lambda^n we_4 \end{aligned}$$

ce qui signifie exactement

$$A^n = \begin{pmatrix} \overline{\lambda}^n & 0 & \lambda^n - \overline{\lambda}^n & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}^n & \lambda^n - \overline{\lambda}^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 : Projecteurs et symétries

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

(a) Montrer que tout projecteur de E est diagonalisable.

(b) Montrer que toute symétrie de E est diagonalisable.

Solution:

(a) Première solution : via la définition par somme directe. Soit p un projecteur de E. Par définition, il existe deux sous-espaces vectoriels de F et G, supplémentaires dans E, tels que $p(x) = x$ pour tout x dans F et $p(x) = 0$ pour tout x dans G. Soit donc r la dimension de F, $n-r$ celle de G, $(e_1,\dots,e_r)$ une base de F et $(e_{r+1},\dots,e_n)$ une base de G. La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est libre (puisque E est la somme directe de F et G), donc est une base de E, et la matrice de p dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ est la matrice diagonale ayant pour coefficients r fois la valeur 1 et $n-r$ fois la valeur 0. Il s'ensuit que p est diagonalisable, et que la base $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de diagonalisation de p.

Deuxième solution : via la définition par idempotence. Soit p un projecteur de E, de sorte que $p\circ p = p$. On va montrer que

$$E = \ker p \oplus \ker(p - \mathrm{Id}_E).$$

Soit $x \in E$, qu'on écrit $x = (x-p(x)) + p(x)$. Alors $p(x-p(x)) = p(x) - p\circ p(x) = 0$ donc $(x-p(x)) \in \ker p$. Ensuite $(p-\mathrm{Id}_E)(p(x)) = p\circ p(x) - p(x) = 0$ donc $p(x) \in \ker(p-\mathrm{Id}_E)$. On a ainsi montré que $E = \ker p + \ker(p-\mathrm{Id}_E)$. Cette somme est nécessairement directe (puisque $\ker(f-\lambda\mathrm{Id}_E)\cap\ker(f-\mu\mathrm{Id}_E)$ est réduit au vecteur nul dès que $\lambda\neq\mu$, pour tout endomorphisme f de E).

On a montré que la somme du sous-espace propre associée à la valeur propre 0 et du sous-espace propre associée à la valeur propre 1 est directe et égale à l'espace E tout entier, ce qui signifie que p est diagonalisable, avec valeurs propres 0 et 1 (sauf si $p=0$ auquel cas 0 est la seule valeur propre, ou si $p=\mathrm{Id}_E$ auquel cas 1 est la seule valeur propre).

(b) Première solution : via le lien avec un projecteur. Si s est une symétrie, alors $p = (s+\mathrm{Id}_E)/2$ est une projection. Puisque p est diagonalisable, il existe une base $(v_1,\dots,v_n)$ de vecteurs propres de p, qui sont (puisque $s = 2p-\mathrm{Id}_E$) également des vecteurs propres de s. Donc $(v_1,\dots,v_n)$ est une base de vecteurs propres de s, ce qui signifie que s est diagonalisable.

Deuxième solution : via la définition par somme directe. Soit s une symétrie de E. Par définition, il existe deux sous-espaces vectoriels de F et G, supplémentaires dans E, tels que $s(x) = x$ pour tout x dans F et $s(x) = -x$ pour tout x dans G. Soit donc r la dimension de F, $n-r$ celle de G, $(e_1,\dots,e_r)$ une base de F et $(e_{r+1},\dots,e_n)$ une base de G. La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est libre (puisque E est la somme directe de F et G), donc est une base de E, et la matrice de s dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ est la matrice diagonale ayant pour coefficients r fois la valeur 1 et $n-r$ fois la valeur -1. Il s'ensuit que s est diagonalisable, et que la base $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de diagonalisation de s.

Troisième solution : via la définition par involution. Soit s une symétrie de E, de sorte que $s\circ s = \mathrm{Id}_E$. On va montrer que

$$E = \ker(s-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s+\mathrm{Id}_E).$$

Soit $x \in E$. On a

$$x = \frac{x+s(x)}{2} + \frac{x-s(x)}{2}.$$

Or $s(x+s(x)) = s(x)+x$ et $s(x-s(x)) = s(x)-x$, ce qui implique $E = \ker(s-\mathrm{Id}_E) + \ker(s+\mathrm{Id}_E)$, et cette somme est nécessairement directe. Il s'ensuit que s est diagonalisable de valeurs propres 1 et -1 (sauf si $s=-\mathrm{Id}_E$ ou $s=\mathrm{Id}_E$).

Exercice 12 : Projecteurs et symétries, encore

On considère les endomorphismes p et s de $\mathbb{R}^2$ ayant respectivement pour matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les matrices A et B sont diagonalisables et les diagonaliser :

(a) Par le calcul.

(b) En interprétant les endomorphismes p et s géométriquement.

Solution:

(a) On a d'une part

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1/2 & -1/2 \\ -1/2 & X-1/2 \end{vmatrix} = (X-1/2)^2 - 1/4 = X^2 - X = X(X-1).$$

Ce polynôme caractéristique est scindé à racines simples 0 et 1, donc A est diagonalisable avec pour valeurs propres 0 et 1, et les sous-espaces propres sont $\ker(p)$ et $\ker(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$. Il est clair que

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et que } A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $A = QDQ^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$$

Ce polynôme caractéristique est également scindé à racines simples, qui sont 1 et -1, donc B est diagonalisable avec pour valeurs propres 1 et -1, et les sous-espaces propres sont $\ker(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$. On constate que

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et que } B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $B = QD'Q^{-1}$ avec

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et encore } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Notons

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

les deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a $p(e_1) = (e_1+e_2)/2$ et $p(e_2) = (e_1+e_2)/2$, donc (faire un dessin...) on a l'intuition que l'endomorphisme p "projette" les vecteurs e_1 et e_2 sur la droite d'équation $y = x$ dans le plan. Pour valider cette intuition, on note

$v = e_1 + e_2$, $w = e_1 - e_2$ (représentant la direction orthogonale à celle de v) et on remarque que $p(v) = p(e_1) + p(e_2) = e_1 + e_2 = v$, et $p(w) = p(e_1) - p(e_2) = 0$. Puisque la famille (v, w) a pour matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

qui est de déterminant $-2 \neq 0$, cette famille est libre, donc on peut écrire $\mathbb{R}^2$ en somme directe des droites $F = \mathbb{R}v$ et $G = \mathbb{R}w$, et on a $p(x) = x$ pour tout $x \in F$, et $p(x) = 0$ pour tout $x \in G$. Ceci signifie que p est bien une projection sur F parallèlement à G, et donc (cf. exercice précédent) A est diagonalisable sous la forme $A = QDQ^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En ce qui concerne s, on a $s(e_1) = e_2$ et $s(e_2) = e_1$, donc on a l'intuition que s est une symétrie par rapport là encore à la droite d'équation $y = x$ dans le plan. Avec les notations ci-dessus, on a $s(v) = s(e_1) + s(e_2) = e_1 + e_2 = v$ et $s(w) = s(e_1) - s(e_2) = e_2 - e_1 = -w$, donc $s(x) = x$ pour tout $x \in F$, et $s(x) = -x$ pour tout $x \in G$. Ceci signifie que s est bien une symétrie sur F parallèlement à G, et donc (cf. exercice précédent) B est diagonalisable sous la forme $B = QD'Q^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 : Quelques questions générales

On se place sur un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie n.

(a) On suppose qu'un endomorphisme f de E n'a qu'une seule valeur propre. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit diagonalisable.

(b) Soit $k \geq 2$. Montrer qu'un endomorphisme f de E a 0 pour valeur propre si et seulement si 0 est valeur propre de f^k.

(c) On suppose que f est un automorphisme de E. Déterminer les valeurs propres de f^{-1} en fonction de celles de f.

(d) Montrer que si un endomorphisme f de E est diagonalisable alors $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

(e) Montrer que si deux matrices A, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont diagonalisables, alors elles sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

(f) Soient f un endomorphisme de E et g un automorphisme de E. Montrer que f et $g \circ f \circ g^{-1}$ ont les mêmes valeurs propres, et que si λ est une valeur propre de chacun d'eux, alors leurs sous-espaces propres pour cette valeur propre ont la même dimension.

Solution:

(a) Soit λ l'unique valeur propre de f. Alors f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E, disons $(e_1, \ldots, e_n)$, formée de vecteurs propres de f. Puisque λ est l'unique valeur propre de f, on a $f(e_i) = \lambda e_i$ quel que soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, donc $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire que $f = \lambda \mathrm{Id}_E$. Réciproquement, toute homothétie est bien sûr diagonalisable. La condition nécessaire recherchée est donc que f soit une homothétie.

(b) On montre d'abord que si 0 est valeur propre de f, alors 0 est valeur propre de f^k.

$\rightarrow$ Première preuve : Supposons que 0 est valeur propre de f. Alors il existe un vecteur x de E non nul tel que $f(x) = 0$. Donc $f^k(x) = f^{k-1}(f(x)) = f^{k-1}(0) = 0$, de sorte que 0 est valeur propre de f^k. On vient en fait de montrer que $\ker f \subset \ker f^k$; plus généralement $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ quel que soit l'endomorphisme g de E. Voir Exercice 1 xvi).

$\rightarrow$ Seconde preuve : Montrons la contraposée, c'est-à-dire que si 0 n'est pas valeur propre de f^k, alors 0 n'est pas valeur propre de f. On rappelle que pour tout endomorphisme f de E,

$$0 \text{ n'est pas valeur propre de } f \Leftrightarrow \ker f = \{0\} \Leftrightarrow f \text{ est injectif.}$$

Montrons donc la proposition suivante (sans rapport avec l'algèbre linéaire), qui donnera directement le résultat souhaité en prenant $E = F = G$ et $g = f^{k-1}$.

Proposition : Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications telles que la composée $g \circ f$ est injective. Alors f est injective.

Preuve de la proposition : Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $g(f(x)) = g(f(y))$, soit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Comme $g \circ f$ est injectif, on a donc $x = y$. On a donc démontré que f est injective.

Montrons maintenant que si 0 est valeur propre de f^k, alors 0 est valeur propre de f.

$\rightarrow$ Première preuve : Supposons que 0 est valeur propre de f^k. Alors il existe un vecteur x de E non nul tel que $f^k(x) = 0$. Il s'ensuit que la partie $\{j \in \mathbb{N} \mid f^j(x) \neq 0\}$ est non vide et majorée, donc admet un plus grand élément r, avec nécessairement $0 \leq r \leq k-1$. On a $f^r(x) \neq 0$ et $f^{r+1}(x) = 0$ par définition, ce qui signifie que $f(f^r(x)) = f^{r+1}(x) = 0$, donc 0 est valeur propre de f avec $f^r(x)$ comme vecteur propre associé.

$\rightarrow$ Seconde preuve : Montrons la contraposée : Si 0 n'est pas valeur propre de f alors 0 n'est pas valeur propre de f^k. On a

$$0 \text{ n'est pas valeur propre de } f \Leftrightarrow \ker f = \{0\}.$$

Montrons donc que si $\ker f = \{0\}$ alors $\ker f^k = \{0\}$. Supposons que $\ker f = \{0\}$. Soit $x \in \ker f^k$. Alors $f^k(x) = f(f^{k-1}(x)) = 0$. Comme $\ker f = \{0\}$, $f^{k-1}(x) = 0$. Par récurrence, on obtient que $0 = f^k(x) = f^{k-1}(x) = f^{k-2}(x) = \cdots = f(x)$. Donc $f(x) = 0$ et par suite $x = 0$ puisque $\ker f = \{0\}$. Ainsi $\ker f^k \subset \{0\}$ et donc $\ker f^k = \{0\}$ (puisque $\ker f^k$ est un espace vectoriel).

(c) Puisque f est un automorphisme de E, 0 n'est pas valeur propre de f. Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ est valeur propre de f, alors il existe $x \in E$, non nul, tel que $f(x) = \lambda x$. De ceci on déduit $f^{-1}(x) = \lambda^{-1}x$, donc λ^{-1} est valeur propre de f. De même, réciproquement, si μ est valeur propre de f^{-1} et y est un vecteur propre de f^{-1} pour cette valeur propre, alors $f(y) = \mu^{-1}y$. Par conséquent, les valeurs propres de f^{-1} sont les inverses des valeurs propres de f. [On a même $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = \ker(f^{-1} - \lambda^{-1}\mathrm{Id}_E)$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.]

(d) Soit f un endomorphisme diagonalisable de E. Si f est injectif, il n'y a rien à montrer, puisque f est surjectif par le théorème du rang, et s'il est nul, il n'y a évidemment rien à montrer non plus. Sinon, soit $1 \leq r \leq n-1$ le rang de f (et donc $\dim \ker(f) = n - r$). Encore par le théorème du rang, il suffit de montrer que $E = \ker f + \mathrm{Im}\, f$. Puisque f

est diagonalisable, il existe une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de vecteurs propres de f, qu'on peut ordonner de sorte à ce que $e_{r+1},\ldots,e_n$ soient vecteurs propres de f pour la valeur propre 0 (c'est-à-dire des éléments de $\ker f$). Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$, nécessairement non nulles, les valeurs propres de f qui correspondent aux vecteurs propres $e_1,\ldots,e_r$. Soit enfin $y\in E$, qu'on écrit $y=\sum_{i=1}^n a_ie_i$. Alors

$$y=\sum_{i=1}^r a_i\lambda_i^{-1}(\lambda_ie_i)+\sum_{i=r+1}^n a_ie_i=\sum_{i=1}^r a_i\lambda_i^{-1}f(e_i)+\sum_{i=r+1}^n a_ie_i=f(x)+z,$$

pour $x=\sum_{i=1}^r a_i\lambda_i^{-1}e_i$ et $z=\sum_{i=r+1}^n a_ie_i\in\operatorname{Im} f$. Ceci montre que $E=\ker f+\operatorname{Im} f$, comme attendu.

(e) D'abord, si A et B sont deux matrices semblables, c'est-à-dire $A=PBP^{-1}$ avec $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det(X\mathrm{I}_n-A)=\det(P^{-1})\det(X\mathrm{I}_n-A)\det(P)=\det(XP^{-1}P-P^{-1}AP)=\det(X\mathrm{I}_n-B)$$

donc A et B ont même polynôme caractéristique. [Ceci n'utilise pas la diagonalisabilité !]

Supposons, réciproquement, que A et B sont diagonalisables avec le même polynôme caractéristique. Alors l'égalité des polynômes caractéristiques implique que les valeurs propres de A et celles de B sont les mêmes, disons $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, avec les mêmes multiplicités, disons $n_1,\ldots,n_p$. La diagonalisabilité de A et B entraîne ensuite que, pour tout $j\in\{1,\ldots,p\}$, $\ker(A-\lambda_j\mathrm{I}_n)$ et $\ker(B-\lambda_j\mathrm{I}_n)$ sont de dimension n_j, donc on peut trouver des bases $(u_1^{(j)},\ldots,u_{n_j}^{(j)})$ et $(v_1^{(j)},\ldots,v_{n_j}^{(j)})$ de $\ker(A-\lambda_j\mathrm{I}_n)$ et $\ker(B-\lambda_j\mathrm{I}_n)$. La réunion $\mathcal{B}$ des bases $(u_1^{(j)},\ldots,u_{n_j}^{(j)})$, pour $1\leq j\leq p$, constitue une base de E (puisque $n_1+\cdots+n_p=n$), et de même, la réunion $\mathcal{B}'$ des bases $(v_1^{(j)},\ldots,v_{n_j}^{(j)})$, pour $1\leq j\leq p$, constitue une base de E. Dans la base $\mathcal{B}$, l'endomorphisme représenté par A a pour matrice la matrice diagonale D, ayant successivement pour éléments $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ un nombre $n_1,\ldots,n_p$ de fois, c'est-à-dire qu'il existe $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A=PDP^{-1}$. De même, dans la base $\mathcal{B}'$, l'endomorphisme représenté par B a pour matrice cette matrice diagonale D, c'est-à-dire qu'il existe $Q\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B=QDQ^{-1}$. Par conséquent $B=QP^{-1}DP^{-1}Q=QP^{-1}D(QP^{-1})^{-1}$, ce qui montre que A et B sont semblables.

(f) Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned}\lambda\text{ valeur propre de } f &\Leftrightarrow \exists x\in E\setminus\{0\},\ f(x)=\lambda x\\ &\Leftrightarrow \exists x\in E\setminus\{0\},\ g\circ f(x)=\lambda g(x)\\ &\Leftrightarrow \exists x\in E\setminus\{0\},\ g\circ f\circ g^{-1}(g(x))=\lambda g(x)\\ &\Leftrightarrow \lambda\text{ valeur propre de } g\circ f\circ g^{-1}.\end{aligned}$$

[La deuxième et la troisième équivalence sont correctes car g est un automorphisme de E, et la quatrième équivalence car $x\neq 0\Rightarrow g(x)\neq 0$ puisque g est en particulier injectif.] Ceci montre bien que f et $g\circ f\circ g^{-1}$ ont les mêmes valeurs propres. Puisque, d'après ce raisonnement, x est un vecteur propre de f si et seulement $g(x)$ est un vecteur propre de $g\circ f\circ g^{-1}$ pour la même valeur propre, on a également montré que ces deux endomorphismes ont des sous-espaces propres de même dimension (toujours car, g étant injectif, il conserve les dimensions).

Exercice 14 : Calcul du commutant

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie.

(a) Montrer que si f et g commutent, alors tout sous-espace propre de f est stable par g.

(b) On suppose f diagonalisable. Montrer que f et g commutent si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.

(c) Application : déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

[L'ensemble de ces matrices est appelé commutant, ou centralisateur, de A. L'étude de ce type d'ensemble est fondamentale dans un certain nombre de problèmes en algèbre.]

Solution:

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f et soit $x \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Alors $f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$. Par conséquent $g(x) \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$, ce qui montre bien que $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par g.

(b) Il suffit de montrer que si les sous-espaces propres de f sont stables par g, alors f et g commutent. Supposons donc que les sous-espaces propres de f sont stables par g, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres pour f, avec valeurs propres respectives $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Soit $x \in E$, qu'on écrit $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$. Alors

$$f \circ g(x) = \sum_{i=1}^n a_i f \circ g(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i g(e_i)$$

puisque les sous-espaces propres de f sont stables par g, puis

$$f \circ g(x) = \sum_{i=1}^n a_i g(\lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^n a_i g \circ f(e_i) = g \circ f(x).$$

On a bien montré que f et g commutent.

(c) On commence par déterminer si A est diagonalisable. On a

$$\det(X\mathrm{I}_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ -1 & X-2 & -1 \\ -2 & -2 & X-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ X-2 & X-2 & 0 \\ -2 & -2 & X-3 \end{vmatrix}$$

en faisant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, puis

$$\det(X\mathrm{I}_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & -2 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)(X-3)$$

en faisant $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$. Il s'ensuit que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples et donc que A est diagonalisable, avec des sous-espaces propres chacun de dimension 1. On a

$$A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ donc } \ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathbb{R}X_1 \text{ avec } X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite

$$A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathbb{R}X_2 \text{ avec } X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Enfin

$$A - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } \ker(A - 3\mathrm{I}_3) = \mathbb{R}X_3 \text{ avec } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le résultat de la question précédente entraîne que la matrice M commute avec A si et seulement si M laisse stable les trois sous-espaces propres $\ker(A - \mathrm{I}_3)$, $\ker(A - 2\mathrm{I}_3)$ et $\ker(A-3\mathrm{I}_3)$. Il faut et il suffit donc que $MX_1 \in \ker(A-\mathrm{I}_3) = \mathbb{R}X_1$, $MX_2 \in \ker(A-2\mathrm{I}_3) = \mathbb{R}X_2$ et $MX_3 \in \ker(A - 3\mathrm{I}_3) = \mathbb{R}X_3$, ce qui veut exactement dire que X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de M. En notant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

les matrices M commutant avec A sont donc exactement les matrices de la forme $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale à coefficients réels.

Exercice 15 : Autour de la commutativité, encore

On suppose que f et g sont deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel E de dimension finie, et que f et g commutent. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

Solution: On sait que le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{C}$, donc f admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Puisque $F = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par g, on peut considérer la restriction $\widetilde{g}$ de g à F, qui est un endomorphisme de F. Alors $\widetilde{g}$ admet lui aussi une valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ (car F est de dimension > 0...) à laquelle correspond un certain vecteur propre $x \in F$. Ce vecteur x est, par définition, un vecteur propre de f, et c'est aussi un vecteur propre de g, puisque $g(x) = \widetilde{g}(x) = \mu x$ (car $x \in F$). Il s'ensuit que x est un vecteur propre commun à f et g.

Exercice 16 : Autour des matrices réelles de déterminant négatif

Soient $n \geq 2$ et A une matrice carrée de taille n à coefficients réels.

(a) Montrer que si $\det(A) < 0$, alors A admet au moins une valeur propre réelle.

(b) Montrer que si de plus $n = 2$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(c) La conclusion de la question précédente reste-t-elle vraie pour $n \geq 3$?

Solution:

(a) Si n est impair alors le polynôme caractéristique de A, qui est à coefficients réels, est de degré impair et donc a une racine réelle, ce qui montre que A a au moins une valeur propre réelle. Si n est pair, alors la condition $\det(A) < 0$ entraîne que le terme constant du polynôme caractéristique de A, qui est $\det(A)$, est strictement négatif. Ce polynôme caractéristique, étant unitaire et de degré pair, a donc au moins une racine réelle, ce qui montre encore que A a au moins une valeur propre réelle.

(b) Si de plus $n = 2$, on constate que le polynôme caractéristique de A possède deux racines distinctes (si la racine réelle était double, le déterminant serait positif), et donc A a deux valeurs propres simples en dimension $n = 2$, ce qui entraîne qu'elle est diagonalisable.

(c) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

est de déterminant -1, et a pour polynôme caractéristique $(X+1)(X^2+1)$, qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 : Diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{K}).$$

(a) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

(b) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

(c) Calculer A^n pour tout $n \geq 2$.

Solution:

(a) En développant par rapport à la première colonne,

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 2 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -2 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & 1 \\ -2 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & X \end{vmatrix} = X(X^2+2) + 2X = X(X^2+4).$$

Le polynôme χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(b) Sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a $\chi_A(X) = X(X-2i)(X+2i)$. Le polynôme χ_A est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, ce qui entraîne que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, avec trois sous-espaces propres de dimension 1 chacun.

(c) On a clairement

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme le noyau de A est de dimension 1, la famille réduite au vecteur v_1 est une base de $\ker A$. Ensuite

$$(A - 2i\mathrm{I}_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ix - 2y \\ x - 2iy - z \\ 2y - 2iz \end{pmatrix}.$$

Donc

$$(A-2i\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcl}-ix&-&y&&&=&0\\x&-&2iy&-&z&=&0\\&&y&-&iz&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x&=&iy\\z&=&-iy\end{array}\right.$$

Ainsi

$$(A-2i\mathrm{I}_3)v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ avec }v_2=\begin{pmatrix}-1\\i\\1\end{pmatrix}.$$

La famille réduite au vecteur v_2 est une base de $\ker(A-2i\mathrm{I}_3)$. Enfin, puisque A est réelle, le vecteur

$$v_3=\overline{v_2}=\begin{pmatrix}-1\\-i\\1\end{pmatrix}$$

appartient à $\ker(A+2i\mathrm{I}_3)$, donc la famille réduite au vecteur v_3 est une base de $\ker(A+2i\mathrm{I}_3)$. Soit maintenant $f:\mathbb{C}^3\mapsto\mathbb{C}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{C}^3$ est A. Le calcul de f^n est facile dans la base (v_1,v_2,v_3), puisque pour tous $a,b,c\in\mathbb{C}$,

$$f^n(av_1+bv_2+cv_3)=b(2i)^nv_2+c(-2i)^nv_3=(2i)^n(bv_2+(-1)^ncv_3)=(2i)^n\begin{pmatrix}-b-(-1)^nc\\i(b-(-1)^nc)\\b+(-1)^nc\end{pmatrix}.$$

Il suffit maintenant d'effectuer le passage de la base canonique à la base (v_1,v_2,v_3) (ce qui revient à inverser la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1,v_2,v_3)...) par exemple en résolvant le système

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=av_1+bv_2+cv_3&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcll}a&-&b&-&c&=&x&L_1\\&&ib&-&ic&=&y&L_2\\a&+&b&+&c&=&z&L_3\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lll}a&=\dfrac{x+z}{2}&(L_1+L_3)/2\\b-c&=-iy&-iL_2=L_2'\\b+c=z-a&=\dfrac{z-x}{2}&L_3\end{array}\right.\end{aligned}$$

De ceci on tire

$$b=\frac{1}{4}(-x-2iy+z)\text{ et }c=\frac{1}{4}(-x+2iy+z).$$

Donc

$$\begin{aligned}f^n(xe_1+ye_2+ze_3)&=\frac{(2i)^n}{4}\begin{pmatrix}x+2iy-z+(-1)^n(x-2iy-z)\\i\left(-x-2iy+z+(-1)^n(x-2iy-z)\right)\\-x-2iy+z+(-1)^n(-x+2iy+z)\end{pmatrix}\\&=\frac{(2i)^n}{4}\begin{pmatrix}(1+(-1)^n)x+(1-(-1)^n)2iy-(1+(-1)^n)z\\i(-1+(-1)^n)x+(1+(-1)^n)2y+i(1-(-1)^n)z\\-(1+(-1)^n)x+((-1)^n-1)2iy+(1+(-1)^n)z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui signifie que

$$A^n = \frac{(2i)^n}{4}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 2i(1-(-1)^n) & -1-(-1)^n \\ i(-1+(-1)^n) & 2(1+(-1)^n) & i(1-(-1)^n) \\ -1-(-1)^n & 2i((-1)^n-1) & 1+(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Enfin, en distinguant $n=2p+2$ pair et $n=2p+1$ impair, pour tout $p\geq 0$,

$$A^{2p+2} = (-4)^p\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } A^{2p+1} = (-4)^p\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque : on a en fait $A^{2p+1} = (-4)^p A$, et $A^{2p+2} = (-4)^p A^2$ avec

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On aurait également pu obtenir ces résultats plus rapidement en remarquant que dans la base (v_1, v_2, v_3),

$$f^{2p+1}(av_1+bv_2+cv_3) = (-4)^p 2i(bv_2 - cv_3) = (-4)^p f(av_1+bv_2+cv_3),$$

et

$$f^{2p+2}(av_1+bv_2+cv_3) = (-4)^{p+1}(bv_2 + cv_3) = (-4)^p f^2(av_1+bv_2+cv_3).$$

Exercice 18 : Un souvenir !

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq b$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & \dots & a \\ b & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a \\ b & \dots & \dots & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

A quelle condition cette matrice est-elle diagonalisable ?

Solution: Le polynôme caractéristique de cette matrice s'écrit

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -a & \dots & \dots & -a \\ -b & X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & -a \\ -b & \dots & \dots & -b & X \end{vmatrix}.$$

On a déjà rencontré ce déterminant ! On a vu que

$$\chi_A(X) = \frac{b(X+a)^n - a(X+b)^n}{b-a}.$$

Les valeurs propres de A sont les racines de ce polynôme, donc ce sont les solutions $x \in \mathbb{C}$ de l'équation $b(x+a)^n = a(x+b)^n$.

Si $a = 0$ ou $b = 0$, la seule solution est $x = 0$, mais la matrice A est alors triangulaire non diagonale avec une unique valeur propre, donc n'est pas diagonalisable.

Si a et b sont non nuls, alors ni $x = -a$ ni $x = -b$ ne sont solutions de l'équation $b(x+a)^n = a(x+b)^n$, donc

$$b(x+a)^n = a(x+b)^n \Leftrightarrow \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^n = \frac{a}{b}.$$

Posons $a = re^{i\theta}$ et $b = \rho e^{i\phi}$ avec $r, \rho > 0$ et $\theta, \phi \in [0, 2\pi[$. Alors

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^n = \frac{a}{b} &\Leftrightarrow \left(\frac{x+re^{i\theta}}{x+\rho e^{i\phi}}\right)^n = \frac{r}{\rho}e^{i(\theta-\phi)} \\ &\Leftrightarrow \frac{x+re^{i\theta}}{x+\rho e^{i\phi}} = \left(\frac{r}{\rho}\right)^{1/n} e^{i(\theta-\phi+2k\pi)/n} =: z_k,\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.\end{aligned}$$

[Les z_k sont les racines $n-$ièmes de a/b.] Les z_k sont tous distincts, donc il y a n valeurs propres distinctes x_k, qui sont

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^n = \frac{a}{b} &\Leftrightarrow x = x_k = \rho e^{i\phi}\frac{z_k - (re^{i\theta})/(\rho e^{i\phi})}{1-z_k} = \rho e^{i\phi}\left(\frac{1-z_k^n}{1-z_k} - 1\right),\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \\ &\Leftrightarrow x = x_k = b(P(z_k) - 1),\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\},\end{aligned}$$

où $P(X) = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$. Il s'ensuit que A est diagonalisable si et seulement si a et b sont non nuls, et les valeurs propres de A sont alors les $x_k = b(P(z_k) - 1)$, pour $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, où les z_k sont les racines $n-$ièmes de a/b.

Exercice 19 : Puissances d'un bloc de Jordan

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 2$, on considère la matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme associé à M relativement à la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

(b) Montrer que f se décompose sous la forme $f = d + n$ avec $d \circ n = n \circ d$ où d est un endomorphisme diagonalisable et n est un endomorphisme nilpotent, en précisant la matrice D de d et la matrice N de n dans une base que l'on choisira. [C'est un cas particulier de la décomposition dite de Dunford.]

(c) Calculer la puissance de matrices M^p en utilisant le binôme de Newton.

Solution: -pour un bloc de Jordan de taille 3, voir la vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=nHQ1RwxajQA`

(a) La matrice M est triangulaire, donc les valeurs propres de f sont les coefficients diagonaux de M. Il s'ensuit que M a pour unique valeur propre λ. Par conséquent, si f était diagonalisable, la matrice M serait en fait diagonale, et puisque ce n'est pas le cas, f n'est pas diagonalisable. [On montre en fait facilement que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\ker((f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})^k)$ a pour base $(e_1, \ldots, e_k)$, et est donc de dimension k.]

(b) Soient $D = \lambda I_n$ et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient d et n les applications linéaires associées à D et à N dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, de sorte que $f = d + n$ et $M = D + N$. Evidemment D est diagonalisable et commute avec N, puisque D est un multiple de la matrice identité. Ensuite $n(e_1) = 0$ et pour tout $i \geq 2$, $n(e_i) = e_{i-1}$, donc par récurrence immédiate sur k, on obtient $n^k(e_i) = 0$ pour tout $i \leq k$, et pour tout $i \geq k + 1$, $n^k(e_i) = e_{i-k}$. En particulier $N^n = 0$, ce qui signifie que N est nilpotente. On a donc bien $f = d + n$ avec $d \circ n = n \circ d$ où d est un endomorphisme diagonalisable et n est un endomorphisme nilpotent.

(c) Puisque D et N commutent et que $N^n = 0$, on a, par la formule du binôme de Newton,

$$M^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k D^{p-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} N^k,$$

avec la convention que si $p < k$ alors $\binom{p}{k} = 0$. Ainsi

$$M^p = \begin{pmatrix} \lambda^p & p\lambda^{p-1} & \binom{p}{2}\lambda^{p-2} & \cdots & \cdots & \binom{p}{n-1}\lambda^{p-n+1} \\ 0 & \lambda^p & p\lambda^{p-1} & \ddots & \cdots & \binom{p}{n-2}\lambda^{p-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^p & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{p}{2}\lambda^{p-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \lambda^p & p\lambda^{p-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda^p \end{pmatrix}.$$

Exercice 20 : Diagonalisation et puissances d'une matrice de taille n

Soit $n \geq 2$. On considère la matrice symétrique $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme associé à M relativement à la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel.

(a) Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de f.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer M^k.

Solution:

(a) On a $f(e_1) = e_1$, et f envoie le vecteur e_i sur e_{n-i+2} pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$; en particulier, $f(e_i + e_{n-i+2}) = e_i + e_{n-i+2}$ et $f(e_i - e_{n-i+2}) = -(e_i - e_{n-i+2})$. Pour décompter le nombre de vecteurs distincts ainsi formés, on remarque que les vecteurs $e_i + e_{n-i+2}$ sont distincts tant que $i \leq n-i+2$, c'est-à-dire $2 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$, et que les vecteurs $e_i - e_{n-i+2}$ sont distincts et non nuls tant que $i < n-i+2$, c'est-à dire $2 \leq i \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$.

Lorsque n est pair, on a également $f(e_{n/2+1}) = e_{n/2+1}$, et pour tout $i \in \{2, \ldots, n/2\}$, les vecteurs $e_i + e_{n-i+2}$ et $e_i - e_{n-i+2}$ sont deux à deux distincts, orthogonaux, et sont respectivement vecteurs propres de f pour les valeurs propres 1 et -1. En normalisant, on trouve que la famille composée des vecteurs e_1, $e_{n/2+1}$, et des paires $((e_i + e_{n-i+2})/\sqrt{2}, (e_i - e_{n-i+2})/\sqrt{2})$, pour $i \in \{2, \ldots, n/2\}$, est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.

Lorsque n est impair, la famille composée du vecteur e_1 et des paires $((e_i + e_{n-i+2})/\sqrt{2}, (e_i - e_{n-i+2})/\sqrt{2})$, pour $i \in \{2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.

Remarques : (i) puisque f est diagonalisable et a comme valeurs propres -1 et 1 uniquement, on a $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, donc f est une symétrie (et c'est même une symétrie orthogonale puisque la base de vecteurs propres est orthonormée). On a $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ et $\dim(\ker(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})) = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$.

(ii) En notant M_n la matrice proposée, on voit que dans la base $(e_2, e_n, e_1, e_3, e_4, \ldots, e_{n-1})$, l'endomorphisme f a une matrice définie par blocs sous la forme

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & M_{n-2} \end{pmatrix} \text{ où } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence immédiate, on constate qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, composée uniquement de blocs J et d'un seul bloc final qui

est soit la matrice I_1 (pour n impair) ou la matrice I_2 (pour n pair). On en déduit par exemple que
$$\chi_{M_n}(X) = \chi_J(X)\chi_{M_{n-2}}(X) = (X^2-1)\chi_{M_{n-2}}(X).$$
(b) Puisque M est diagonalisable avec valeurs propres -1 et 1 uniquement, on a $M^2 = \mathrm{I}_n$. Donc $M^k = \mathrm{I}_n$ si k est un entier pair, et $M^k = M$ si k est un entier impair.

Exercice 21 : Diagonalisation d'une matrice de taille n

Soient a un nombre réel non nul et n un entier supérieur ou égal à 2. On considère la matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 & \cdots & \cdots & a^{n-1} \\ 1/a & 0 & a & \cdots & \cdots & a^{n-2} \\ 1/a^2 & 1/a & 0 & \ddots & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1/a^{n-2} & \cdots & \cdots & 1/a & 0 & a \\ 1/a^{n-1} & 1/a^{n-2} & \cdots & \cdots & 1/a & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme associé à M relativement à la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que le polynôme caractéristique de f est donné par
$$\chi_f(X) = (X+1)^{n-1}(X+1-n).$$

(b) Donner une base du sous-espace propre $\ker(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

(c) Donner une base du sous-espace propre $\ker(f - (n-1)\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

(d) Est ce que f est diagonalisable ?

Solution:

(a) On a

$$
\begin{aligned}
\det(M - X\mathrm{I}_n) &= (-1)^n \chi_f(X) \\
&= \begin{array}{c}\begin{vmatrix}
-X & a & a^2 & \cdots & \cdots & a^{n-1} \\
1/a & -X & a & \cdots & \cdots & a^{n-2} \\
1/a^2 & 1/a & -X & \ddots & \cdots & a^{n-3} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
1/a^{n-2} & \cdots & \cdots & 1/a & -X & a \\
1/a^{n-1} & 1/a^{n-2} & \cdots & \cdots & 1/a & -X
\end{vmatrix}\end{array}
\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_{n-1} \\ L_n \end{array} \\
&= \begin{array}{c}\begin{vmatrix}
-X-1 & aX+a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & -X-1 & aX+a & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & -X-1 & \ddots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -X-1 & aX+a \\
1/a^{n-1} & 1/a^{n-2} & \cdots & \cdots & 1/a & -X
\end{vmatrix}\end{array}
\begin{array}{c} L_1 - aL_2 \\ L_2 - aL_3 \\ L_3 - aL_4 \\ \vdots \\ L_{n-1} - aL_n \\ L_n \end{array} \\
&= (X+1)^{n-1} \begin{array}{c}\begin{vmatrix}
-1 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & -1 & a & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & -1 & \ddots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & a \\
1/a^{n-1} & 1/a^{n-2} & \cdots & \cdots & 1/a & -X
\end{vmatrix}\end{array}
\begin{array}{c} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \\ \vdots \\ L'_{n-1} \\ L'_n \end{array} .
\end{aligned}
$$

On peut maintenant, au choix, remplacer la ligne L'_n par la ligne

$$L'_n + \frac{1}{a^{n-1}} L'_1 + \frac{2}{a^{n-2}} L'_2 + \cdots + \frac{n-1}{a} L'_{n-1}$$

pour obtenir

$$
\begin{aligned}
(-1)^n \chi_f(X) &= (X+1)^{n-1} \begin{vmatrix}
-1 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & -1 & a & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & -1 & \ddots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & a \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -X+n-1
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^n (X+1)^{n-1} (X+1-n)
\end{aligned}
$$

comme attendu, ou bien faire $C_i \leftarrow C_i + aC_{i-1}$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$ pour aboutir à un déterminant d'une matrice triangulaire inférieure et obtenir le même résultat.

(b) On a, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$,

$$(M + \mathrm{I}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ax_2 + a^2 x_3 + \cdots + a^{n-1} x_n \\ \frac{1}{a} x_1 + x_2 + a x_3 + \cdots + a^{n-2} x_n \\ \vdots \\ \frac{1}{a^{n-1}} x_1 + \frac{1}{a^{n-2}} x_2 + \cdots + x_n \end{pmatrix} .$$

Chacune des lignes de ce vecteur est en fait la suivante multipliée par a. Par conséquent

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \Leftrightarrow x_1 + ax_2 + a^2x_3 + \cdots + a^{n-1}x_n = 0.$$

C'est l'équation d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, dont on va donc chercher $n-1$ vecteurs de base. On remarque que

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, v_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}),$$

et ces vecteurs sont clairement linéairement indépendants, donc $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ est une base de $\ker(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

(c) On peut remarquer directement que

$$v_n = \begin{pmatrix} a^{n-1} \\ a^{n-2} \\ \vdots \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(f - (n-1)\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$$

et puisque $n-1$ est une valeur propre de f de multiplicité 1, son sous-espace propre est de dimension 1, ce qui veut dire que la famille réduite à v_n est une base de $\ker(f-(n-1)\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

Sinon, on écrit directement

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(f + (1-n)\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \\
\Leftrightarrow &\left\{\begin{array}{lllllllll}
(1-n)x_1 & + & ax_2 & + & \dots & + & a^{n-1}x_n & = 0 & L_1 \\
\frac{1}{a}x_1 & + & (1-n)x_2 & + & \dots & + & a^{n-2}x_n & = 0 & L_2 \\
\frac{1}{a^2}x_1 & + & \frac{1}{a}x_2 & + & \dots & + & a^{n-3}x_n & = 0 & L_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{a^{n-1}}x_1 & + & \frac{1}{a^{n-2}}x_2 & + & \dots & + & (1-n)x_n & = 0 & L_n
\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow &\left\{\begin{array}{lllllllllll}
(1-n)x_1 & + & ax_2 & + & a^2x_3 & + & \dots & + & a^{n-1}x_n & = 0 & L_1 \\
nx_1 & - & nax_2 & + & 0x_3 & + & \dots & + & 0x_n & = 0 & aL_2 - L_1 \\
nx_1 & + & 0x_2 & - & na^2x_3 & + & \dots & + & 0x_n & = 0 & a^2L_3 - L_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
nx_1 & + & 0x_2 & + & \dots & + & 0x_{n-1} & - & na^{n-1}x_n & = 0 & a^{n-1}L_n - L_1
\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow &\ x_1 = ax_2 = a^2x_3 = \dots = a^{n-1}x_n
\end{aligned}
$$

pour obtenir le vecteur propre v_n.

(d) La famille de vecteurs propres $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f, donc f est diagonalisable.

Exercice 22 : Résolution d'un système différentiel I

Résoudre le système d'équations différentielles suivant, d'inconnue $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, en diagonalisant une matrice bien choisie :

$$
\left\{\begin{array}{lll}
x' & = & y+z \\
y' & = & x+z \\
z' & = & x+y
\end{array}\right.
$$

Solution: Posons

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Le système proposé se réécrit

$$
X'(t) = AX(t) \text{ avec } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.
$$

On va diagonaliser la matrice A. On a

$$\det(X\mathrm{I}_3 - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & X & -1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix}$$

en faisant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, puis

$$\det(X\mathrm{I}_3 - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X+1)^2(X-2).$$

en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Les valeurs propres de A sont donc -1 et 2. On a

$$A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que

$$(A+\mathrm{I}_3)v_1 = (A+\mathrm{I}_3)v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, et le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -1 est de dimension ≤ 2, donc (v_1, v_2) est en fait une base de ce sous-espace propre. Puis

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2 est de dimension 1, donc il est engendré par v_3. Il s'ensuit que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A. Les solutions du système différentiel proposé sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \exp(-t)v_1 + C_2 \exp(-t)v_2 + C_3 \exp(2t)v_3 = \begin{pmatrix} C_1e^{-t} + C_3e^{2t} \\ C_2e^{-t} + C_3e^{2t} \\ C_3e^{2t} - (C_1 + C_2)e^{-t} \end{pmatrix}$$

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes réelles.

Exercice 23 : Résolution d'un système différentiel II

Résoudre le système d'équations différentielles suivant, d'inconnue $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, en diagonalisant une matrice bien choisie :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -2x + 2y + 2z \\ y' & = & -10x + 6y + 8z \\ z' & = & 3x - y - 2z \end{array} \right.$$

Solution: Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -10 & 6 & 8 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} C1 & C2 & C3 \\ X+2 & -2 & -2 \\ 10 & X-6 & -8 \\ -3 & 1 & X+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C1 & C2 & C3-C2 \\ X+2 & -2 & 0 \\ 10 & X-6 & -X-2 \\ -3 & 1 & X+1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière colonne

$$\chi_A(X) = (X+2)\begin{vmatrix} X+2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (X+1)\begin{vmatrix} X+2 & -2 \\ 10 & X-6 \end{vmatrix}$$

$\chi_A(X) = (X+2)(X+2-6)+(X+1)((X+2)(X-6)+20) = (X+2)(X-4)+(X+1)(X^2-4X+8)$

$= X^2 - 2X - 8 + X^3 - 4X^2 + 8X + X^2 - 4X + 8 = X^3 - 2X^2 + 2X = X(X^2 - 2X + 2)$.

Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\chi_A(X)$ n'est pas scindé. Donc A n'est pas diagonalisable.
Quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\chi_A(X) = X((X-1)^2 - i^2) = X(X-1-i)(X-1+i)$. Donc A admet les trois valeurs propres 0, $1+i$ et $1-i$ de multiplicité 1. Donc A est diagonalisable.
Soit $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'application linéaire associée dans la base canonique.
Cherchons $\ker f$.

$$\left\{\begin{array}{lllllll} -2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -10x & + & 6y & + & 8z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllllll} -x & + & y & + & z & = & 0 & (L1) \\ -5x & + & 3y & + & 4z & = & 0 & (L2) \\ 3x & - & y & - & 2z & = & 0 & (L3) \end{array}\right.$$

Prenons $-x$ comme pivot dans la première équation. Alors le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{llllllll} -x & + & y & + & z & = & 0 & (L1) \\ & - & 2y & - & z & = & 0 & (L2-5L1) \\ & & 2y & + & z & = & 0 & (L3+3L_1) \end{array}\right.$$

Soit $z = -2y$ et $x = y + z = -y$. En prenant $y = -1$, on obtient le vecteur propre Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Cherchons $\ker(f - (1+i)id_{\mathbb{C}^3})$.

$$\left\{\begin{array}{lllllll} -2x & + & 2y & + & 2z & = & (1+i)x \\ -10x & + & 6y & + & 8z & = & (1+i)y \\ 3x & - & y & - & 2z & = & (1+i)z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllllll} (-3-i)x & + & 2y & + & 2z & = & 0 & (L1) \\ -10x & + & (5-i)y & + & 8z & = & 0 & (L2) \\ 3x & - & y & + & (-3-i)z & = & 0 & (L3) \end{array}\right.$$

Prenons $2z$ dans la première équation comme pivot. Alors le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{llllllll} (-3-i)x & + & 2y & + & 2z & = & 0 & (L1) \\ (-10+4(3+i))x & + & (5-i-8)y & + & 0z & = & 0 & (L2-4L1) \\ (6-(3+i)^2)x & + & (-2+2(3+i))y & + & 0z & = & 0 & (2L3+(3+i)L_1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (-3-i)x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \quad (L'1) \\ (2+4i)x & + & (-3-i)y & & & = & 0 \quad (L'2) \\ (-2-6i)x & + & (4+2i)y & & & = & 0 \quad (L'3) \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations $L'2$ et $L'3$ sont proportionnelles car

$$\begin{vmatrix} 2+4i & -3-i \\ -2-6i & 4+2i \end{vmatrix} = (2+4i)(4+2i)-(3+i)(2+6i) = 8+4i+16i+8i^2-6-18i-2i-6i^2 = 0$$

Donc on ne garde pas la dernière équation $L'3$.
$L'2$ est équivalente à $y = \frac{2+4i}{3+i}x = \frac{(2+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}x = \frac{6-2i+12i-4i^2}{3^2+1^2}x = \frac{10+10i}{10}x = (1+i)x$ et donc $L'1$ donne $(-3-i)x+2(1+i)x+2z = (-1+i)x+2z = 0$ soit $z = \frac{1-i}{2}x$. En prenant $x = 1-i$, on obtient le vecteur propre $v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}$. Comme $f(v_2) = Av_2 = (1+i)v_2$. Donc $A\overline{v_2} = (1-i)\overline{v_2}$. Posons $\overline{v_2} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ i \end{pmatrix}$. Alors $(v_1, v_2, \overline{v_2})$ est une base de vecteurs propres de f. Les solutions complexes sont les fonctions vectorielles de la forme

$$X(t) = C_1 \exp(0t)v_1 + C_2 \exp((1+i)t)v_2 + C_3 \exp((1-i)t)\overline{v_2}.$$

où C_1, C_2 et C_3 désignent trois constantes complexes.
$X(t)$ est une fonction à valeurs réelles ssi $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$C_1v_1+C_2\exp((1+i)t)v_2+C_3\exp((1-i)t)\overline{v_2} = \overline{C_1}v_1+\overline{C_2}\exp((1-i)t)\overline{v_2}+\overline{C_3}\exp((1+i)t)v_2$$

ssi $C_1 = \overline{C_1}$ et $C_3 = \overline{C_2}$. (Car v_1, v_2 et v_3 sont libres). En posant $C_1 = A$ et $C_2 = \frac{B+iC}{2}$, on obtient que les solutions réelles sont de la forme

$$X(t) = Av_1 + \frac{B+iC}{2}\exp((1+i)t)v_2 + \frac{B-iC}{2}\exp((1-i)t)\overline{v_2}$$

$$X(t) = Av_1 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{B+iC}{2}\exp((1+i)t)v_2\right)$$

$$X(t) = Av_1 + \mathrm{Re}\left[(B\exp t\cos t - C\exp t\sin t + iB\exp t\sin t + iC\exp t\cos t)\, v_2\right]$$

soit

$$x(t) = A + B\exp t(\cos t + \sin t) + C\exp t(\cos t - \sin t),$$

$$y(t) = -A + 2B\exp t\cos t - 2C\exp t\sin t,$$

$$x(t) = 2A + B\exp t\sin t + C\exp t\cos t.$$

où A, B et C désignent trois constantes réelles.

Références

[LFA77] Jacqueline Lelong-Ferrand and Jean-Marie Arnaudiès, *Cours de mathématiques. Tome 4*, Dunod, Paris, 1977, Équations différentielles, intégrales multiples, fonctions holomorphes, Deuxième édition, corrigée, 1er Cycle Universitaire. Classes Préparatoires. Mathématiques. MR 0476228