Université d'Angers **P8-P9 2023-24**
L2 Math, DL Math-Eco & DL Math-Info **Diagonalisation - P9**
Luc Menichi & Gilles Stupfler

Fiche d'exercices 2 - Diagonalisation

Exercice 1 : Homothétie

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. On suppose que tout vecteur non nul $x \in E$ est un vecteur propre de f. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 2 : La dérivation comme endomorphisme en dimension finie

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$, où $n \geq 1$. Soit $D : E \to E$ défini par $D(P) = P'$ où P' est le polynôme dérivé de P.

(a) Montrer que D est un endomorphisme de E.
(b) Donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
(c) D est-il diagonalisable ?
(d) Montrer que D est nilpotent d'ordre $n+1$, c'est-à-dire que $D^{n+1} = 0$ et $D^n \neq 0$. Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 3 : Le même... mais en dimension infinie

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables. Soit $D : E \to E$ défini par $D(f) = f'$ où f' est la dérivée de f.

(a) Montrer que D est linéaire.
(b) Donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
(c) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ p réels distincts. Montrer que la famille d'applications $(f_i : x \mapsto \exp(\lambda_i x))_{1 \leq i \leq p}$ est libre.

Exercice 4 : L'opérateur décalage

Soit $E := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $D : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui à toute suite (u_n) fait correspondre la suite (v_n) telle que $v_n = u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

(a) Montrer que D est linéaire.
(b) Donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
(c) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ p éléments de $\mathbb{K}$ distincts et non nuls. Montrer que la famille des suites géométriques $(\lambda_i^n)_{1 \leq i \leq p}$ est libre sur $\mathbb{K}$.

Exercice 5 : Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon

Soit $P(X) = X^q + \alpha_{q-1}X^{q-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$ un polynôme unitaire de degré q. Considérons la matrice carrée à q lignes appelée *matrice compagnon*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{q-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que χ_M, le polynôme caractéristique de M, est égal à P.

Exercice 6 : En dimension 2

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K}).$$

On pose $\Delta = (a-d)^2 + 4bc$.

(a) On se place ici dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\Delta > 0$ ou si $b = c = 0$ et $a = d$.

(b) On se place ici dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si et seulement si $\Delta \neq 0$ ou si $b = c = 0$ et $a = d$.

(c) Application : montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

(dont on discutera l'interprétation géométrique) est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : En dimension 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -15 & 10 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de A et donner une base de chacun d'eux.

(c) A est-elle diagonalisable ? Si oui, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 : En dimension 3, encore

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de A et donner une base de chacun d'eux.

(c) A est-elle diagonalisable ? Si oui, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 : Une première application aux suites récurrentes

Dans une zone de nidification d'une espèce d'oiseaux marins qui est constituée de trois îles on observe :

- parmi ceux qui ont nidifié une année dans l'île A, l'année suivante, 70% nidifieront encore dans l'île A, 20% nidifieront dans l'île B, et 10% nidifieront dans l'île C.

- parmi ceux qui ont nidifié une année dans l'île B, l'année suivante, 60% nidifieront encore dans l'île B, 20% nidifieront dans l'île A et 20% nidifieront dans l'île C.

- parmi ceux qui ont nidifié une année dans l'île C, l'année suivante, 50% nidifieront encore dans l'île C, 20% nidifieront dans l'île A et 30% nidifieront dans l'île B.

On suppose que le nombre d'oiseaux reste constant au cours du temps.

(a) Quelle est l'ultime répartition (si elle existe) dans les différentes zones de nidification ?

(b) Quelle est la répartition dans les différentes zones de nidification au bout de n années en fonction d'une répartition initiale A_0, B_0 et C_0 ? Retrouver l'ultime répartition en faisant tendre n vers $+\infty$.

Exercice 10 : Diagonalisation d'une matrice complexe

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1-it & 0 & 2it & 0 \\ 0 & 1-it & 2it & 0 \\ 0 & 0 & 1+it & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+it \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}), \text{ avec } t \text{ réel non nul.}$$

Montrer que A est diagonalisable, puis calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 : Projecteurs et symétries

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

(a) Montrer que tout projecteur de E est diagonalisable.

(b) Montrer que toute symétrie de E est diagonalisable.

Exercice 12 : Projecteurs et symétries, encore

On considère les endomorphismes p et s de $\mathbb{R}^2$ ayant respectivement pour matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les matrices A et B sont diagonalisables et les diagonaliser :

(a) Par le calcul.

(b) En interprétant les endomorphismes p et s géométriquement.

Exercice 13 : Quelques questions générales

On se place sur un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie n.

(a) On suppose qu'un endomorphisme f de E n'a qu'une seule valeur propre. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit diagonalisable.

(b) Soit $k \geq 2$. Montrer qu'un endomorphisme f de E a 0 pour valeur propre si et seulement si 0 est valeur propre de f^k.

(c) On suppose que f est un automorphisme de E. Déterminer les valeurs propres de f^{-1} en fonction de celles de f.

(d) Montrer que si un endomorphisme f de E est diagonalisable alors $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

(e) Montrer que si deux matrices A, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont diagonalisables, alors elles sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

(f) Soient f un endomorphisme de E et g un automorphisme de E. Montrer que f et $g \circ f \circ g^{-1}$ ont les mêmes valeurs propres, et que si λ est une valeur propre de chacun d'eux, alors leurs sous-espaces propres pour cette valeur propre ont la même dimension.

Exercice 14 : Calcul du commutant

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie.

(a) Montrer que si f et g commutent, alors tout sous-espace propre de f est stable par g.

(b) On suppose f diagonalisable. Montrer que f et g commutent si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.

(c) Application : déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

[L'ensemble de ces matrices est appelé commutant, ou centralisateur, de A. L'étude de ce type d'ensemble est fondamentale dans un certain nombre de problèmes en algèbre.]

Exercice 15 : Autour de la commutativité, encore

On suppose que f et g sont deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel E de dimension finie, et que f et g commutent. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

Exercice 16 : Autour des matrices réelles de déterminant négatif

Soient $n \geq 2$ et A une matrice carrée de taille n à coefficients réels.

(a) Montrer que si $\det(A) < 0$, alors A admet au moins une valeur propre réelle.
(b) Montrer que si de plus $n = 2$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
(c) La conclusion de la question précédente reste-t-elle vraie pour $n \geq 3$?

Exercice 17 : Diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{K}).$$

(a) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?
(b) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?
(c) Calculer A^n pour tout $n \geq 2$.

Exercice 18 : Un souvenir !

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq b$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & \dots & a \\ b & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a \\ b & \dots & \dots & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

A quelle condition cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 19 : Puissances d'un bloc de Jordan

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 2$, on considère la matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme associé à M relativement à la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
(a) Montrer que f n'est pas diagonalisable.
(b) Montrer que f se décompose sous la forme $f = d + n$ avec $d \circ n = n \circ d$ où d est un endomorphisme diagonalisable et n est un endomorphisme nilpotent, en précisant la matrice D de d et la matrice N de n dans une base que l'on choisira. [C'est un cas particulier de la décomposition dite de Dunford.]
(c) Calculer la puissance de matrices M^p en utilisant le binôme de Newton.

Exercice 20 : Diagonalisation et puissances d'une matrice de taille n

Soit $n \geq 2$. On considère la matrice symétrique $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme associé à M relativement à la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel.

(a) Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de f.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer M^k.

Exercice 21 : Diagonalisation d'une matrice de taille n

Soient a un nombre réel non nul et n un entier supérieur ou égal à 2. On considère la matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 & \cdots & \cdots & a^{n-1} \\ 1/a & 0 & a & \cdots & \cdots & a^{n-2} \\ 1/a^2 & 1/a & 0 & \ddots & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1/a^{n-2} & \cdots & \cdots & 1/a & 0 & a \\ 1/a^{n-1} & 1/a^{n-2} & \cdots & \cdots & 1/a & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme associé à M relativement à la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que le polynôme caractéristique de f est donné par

$$\chi_f(X) = (X+1)^{n-1}(X+1-n).$$

(b) Donner une base du sous-espace propre $\ker(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

(c) Donner une base du sous-espace propre $\ker(f - (n-1)\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

(d) Est ce que f est diagonalisable ?

Exercice 22 : Résolution d'un système différentiel I

Résoudre le système d'équations différentielles suivant, d'inconnue $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, en diagonalisant une matrice bien choisie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y + z \\ y' & = & x + z \\ z' & = & x + y \end{array} \right.$$

Exercice 23 : Résolution d'un système différentiel II

Résoudre le système d'équations différentielles suivant, d'inconnue $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, en diagonalisant une matrice bien choisie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -2x + 2y + 2z \\ y' & = & -10x + 6y + 8z \\ z' & = & 3x - y - 2z \end{array} \right.$$

Références

[LFA77] Jacqueline Lelong-Ferrand and Jean-Marie Arnaudiès, *Cours de mathématiques. Tome 4*, Dunod, Paris, 1977, Équations différentielles, intégrales multiples, fonctions holomorphes, Deuxième édition, corrigée, 1er Cycle Universitaire. Classes Préparatoires. Mathématiques. MR 0476228