

Fiche d'exercices 2 - Déterminants

Exercice 1 : Dimension de $(\Lambda^n \mathbb{R}^p)^*$.

- (a) Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $\varphi : F \times \cdots \times F \rightarrow \mathbb{R}$ une forme n -linéaire alternée sur F . Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer que l'application $\Psi : E \times \cdots \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est n -linéaire alternée.
- (b) En déduire que le produit vectoriel $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une application bilinéaire alternée.
- (c) En déduire que $(\Lambda^2 \mathbb{R}^3)^*$, l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^3$ est de dimension ≥ 3 . Indication : Soit i, j, k la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on pourra remarquer que $i \wedge j = k$.
- (d) (dur) Montrer plus généralement que $(\Lambda^n \mathbb{R}^p)^*$, l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^p$ est de dimension $\geq \binom{p}{n}$.
- (e) (dur, dur) Soit φ une forme n -linéaire sur $\mathbb{R}^p$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. En reprenant l'exo sur l'unicité du déterminant, montrer que

$$\begin{aligned} \varphi \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} \right) &= \sum_{\{j_1 < \dots < j_n\} \subset \{1 < \dots < p\}} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{j_{\sigma(1)}1} a_{j_{\sigma(2)}2} \cdots a_{j_{\sigma(n)}n} \right) \varphi(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \\ &= \sum_{\{j_1 < \dots < j_n\} \subset \{1 < \dots < p\}} \varphi(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \begin{vmatrix} a_{j_1 1} & \cdots & a_{j_1 n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j_n 1} & \cdots & a_{j_n n} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

- (f) En déduire que $(\Lambda^n \mathbb{R}^p)^*$, l'espace vectoriel des formes n -linéaires alternées sur $\mathbb{R}^p$ est de dimension $\binom{p}{n}$.

Solution: (d) Pour tout partie $J = \{j_1 < \dots < j_n\}$ de $\{1 < \dots < p\}$, notons par $\varphi_J : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\varphi_J \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_{j_1 1} & \cdots & a_{j_1 n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j_n 1} & \cdots & a_{j_n n} \end{vmatrix}$$

Comme φ_J est le composé du déterminant de taille n et des projections $p_J : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$p_J \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_n} \end{pmatrix}$, d'après (a), φ_J est n -linéaire alternée. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique

de $\mathbb{R}^p$. Alors $\varphi_J(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 1$ et φ_J est nulle sur les autres parties à n éléments de la base canonique. Donc il est facile de voir que les φ_J forment une famille libre. Donc $(\Lambda^n \mathbb{R}^p)^*$ est dimension supérieure au nombre de parties à n éléments de $\{1 < \dots < p\}$.

Exercice 2 : Diagonalisation

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A .

- (a) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f .
- (b) Déterminer les sous-espaces propres de f et donner une base de chacun d'eux.
- (c) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale

Solution: On va diagonaliser la matrice A . On a

$$\det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = (X - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & X & -1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix}$$

en faisant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, puis

$$\det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = (X - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X + 1 & 0 \\ 0 & 0 & X + 1 \end{vmatrix} = (X + 1)^2(X - 2).$$

en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Les valeurs propres de A sont donc -1 et 2 . On a

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que

$$(A + I_3)v_1 = (A + I_3)v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, et le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -1 est de dimension ≤ 2 , donc (v_1, v_2) est en fait une base de ce sous-espace propre. Puis

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2 est de dimension 1 , donc il est engendré par v_3 . Il s'ensuit que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A .

Exercice 3 : Diagonalisation

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -15 & 10 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A .

- (a) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f .

- (b) Déterminer les sous-espaces propres de f et donner une base de chacun d'eux.
(c) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale

Solution:

(a) On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 15 & -10 \\ 1 & X-4 & 1 \\ 1 & -5 & X+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-2 & 15 & -10 \\ 1 & X-4 & 1 \\ 0 & -X-1 & X \end{vmatrix}$$

en faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, puis

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 15 & -X-8 \\ 1 & X-4 & 0 \\ 0 & -X-1 & X \end{vmatrix}$$

en faisant $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$. En développant selon la première colonne, on trouve

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= X(X-2)(X-4) - 15X + (X+1)(X+8) \\ &= X(X-2)(X-4) + X^2 - 6X + 8 \\ &= X(X-2)(X-4) + (X-2)(X-4) = (X+1)(X-2)(X-4). \end{aligned}$$

(b) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique χ_A , donc A a pour valeurs propres -1 , 2 et 4 . Puisqu'il y a trois valeurs propres et que A est de taille 3, les sous-espaces propres de A , qui sont $\ker(A + I_3)$, $\ker(A - 2I_3)$ et $\ker(A - 4I_3)$, sont tous de dimension 1. Rechercher une base de chacun d'entre eux revient donc à en donner un vecteur non nul. On a

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -15 & 10 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières colonnes de $A + I_3$ sont proportionnelles (avec le coefficient -5) donc

$$(A + I_3) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on déduit qu'une base de $\ker(A + I_3)$ est le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ensuite,

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 10 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ici

$$(A - 2I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 10 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une base de $\ker(A - 2I_3)$ est donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Enfin,

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 10 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

On a

$$(A - 4I_3) \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 10 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une base de $\ker(A - 4I_3)$ est donc le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

(c) Puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est 3, A est diagonalisable (on pouvait aussi remarquer que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable). D'après la question précédente, une base de diagonalisation est

$$\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 4 : Déterminant de Vandermonde

On se donne $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ et on pose $\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$. Dé-

montrer que $\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$. [Indication : Montrer que si $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont distincts deux à deux alors $\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x)$ est un polynôme de degré $\leq n - 1$ qui admet $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ comme racines.]

Solution: Si deux des x_i sont égaux, le déterminant cherché a deux colonnes identiques, et est donc nul, tout comme l'expression $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Supposons les x_i tous distincts. On a

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix}.$$

On remarque, en développant par rapport à la dernière colonne, que ce déterminant est un

polynôme en x de degré $\leq n - 1$. Le coefficient de x^{n-1} dans ce polynôme est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = \Delta_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

On remarque également que $x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ sont $n - 1$ racines (distinctes!) de ce polynôme, puisque le déterminant $\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_j)$ a, pour $1 \leq j \leq n - 1$, deux colonnes identiques. On peut ainsi écrire

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x) = \Delta_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i).$$

En prenant $x = x_n$, on trouve

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i).$$

On conclut par récurrence immédiate sur n que

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Exercice 5 : Déterminant de Vandermonde, encore

Soient $n \geq 1$ et $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer par récurrence sur n qu'il existe une suite de polynômes (P_n) à coefficients réels tels que, pour tout $n \geq 1$, $\deg P_n = n$ et $\cos(n\theta) = P_n(\cos \theta)$. Quel est le coefficient dominant de P_n ? [Les polynômes P_n sont appelés polynômes de Tchebychev.]

(ii) Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & \dots & \cos(\theta_n) \\ \cos(2\theta_1) & \cos(2\theta_2) & \dots & \cos(2\theta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos((n-1)\theta_1) & \cos((n-1)\theta_2) & \dots & \cos((n-1)\theta_n) \end{vmatrix}.$$

Solution:

(i) La proposition est évidemment vraie au rang 1, avec $P_1(X) = X$, dont le degré est 1 et le coefficient dominant est $a_1 = 1$. Supposons la proposition vraie au rang $n \geq 1$. On a

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta) = \cos(\theta) P_n(\cos \theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta).$$

Puisque $\cos(n\theta) = P_n(\cos \theta)$, on a en dérivant l'égalité $n \sin(n\theta) = \sin(\theta)P'_n(\cos \theta)$, et ainsi

$$\begin{aligned}\cos((n+1)\theta) &= \cos(\theta)P_n(\cos \theta) - \frac{1}{n}\sin^2(\theta)P'_n(\cos \theta) \\ &= \cos(\theta)P_n(\cos \theta) - \frac{1}{n}(1 - \cos^2(\theta))P'_n(\cos \theta) \\ &= \cos(\theta)\left(P_n(\cos \theta) + \frac{1}{n}\cos(\theta)P'_n(\cos \theta)\right) - \frac{1}{n}P'_n(\cos \theta).\end{aligned}$$

On a donc $\cos((n+1)\theta) = P_{n+1}(\cos \theta)$, avec

$$P_{n+1}(X) = X\left(P_n(X) + \frac{1}{n}XP'_n(X)\right) - \frac{1}{n}P'_n(X).$$

On a nécessairement $\deg P_n \leq n+1$. Si $a_n \neq 0$ désigne le coefficient dominant de P_n (donc celui de X^n), alors le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+1} est celui de X^n dans

$$P_n(X) + \frac{1}{n}XP'_n(X).$$

Ce coefficient vaut $2a_n \neq 0$. La proposition est donc vraie au rang $n+1$, et le coefficient dominant de P_n est $2^{n-1}a_1 = 2^{n-1}$.

(ii) On utilise la multilinéarité du déterminant et la question précédente pour obtenir

$$\begin{aligned}& \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & \dots & \cos(\theta_n) \\ \cos(2\theta_1) & \cos(2\theta_2) & \dots & \cos(2\theta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos((n-1)\theta_1) & \cos((n-1)\theta_2) & \dots & \cos((n-1)\theta_n) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & \dots & \cos(\theta_n) \\ 2\cos^2(\theta_1) & 2\cos^2(\theta_2) & \dots & 2\cos^2(\theta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2^{n-2}\cos^{n-1}(\theta_1) & 2^{n-2}\cos^{n-1}(\theta_2) & \dots & 2^{n-2}\cos^{n-1}(\theta_n) \end{vmatrix} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & \dots & \cos(\theta_n) \\ \cos^2(\theta_1) & \cos^2(\theta_2) & \dots & \cos^2(\theta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos^{n-1}(\theta_1) & \cos^{n-1}(\theta_2) & \dots & \cos^{n-1}(\theta_n) \end{vmatrix} \\ &= 2^{(n-1)(n-2)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos(\theta_j) - \cos(\theta_i)).\end{aligned}$$

Exercice 6 :

On se donne une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$, pour $n \geq 2$. On pose $f_i = e_i + e_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $f_n = e_n + e_1$. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est-elle une base de $\mathbb{C}^n$?

Solution: La question revient à calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

de la matrice des coordonnées des vecteurs $f_1, \dots, f_n$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. En développant par rapport à la dernière colonne, on trouve

$$D_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1)^n.$$

Ce déterminant est donc nul si et seulement si n est pair. On en conclut que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si n est impair.

Exercice 7 :

Soit $n \geq 2$. Trouver toutes les matrices A de taille n telles que, pour toute matrice X de taille n , $\det(A + X) = \det(A) + \det(X)$. [On pourra se rappeler que toute matrice A de taille n est équivalente à la matrice identité de taille $r = \text{rg}(A)$.]

Solution: La matrice nulle convient, et on va montrer que c'est la seule.

En prenant $X = A$, on a $2^n \det(A) = \det(2A) = 2 \det(A)$, ce qui (puisque $n \geq 2$) donne $\det(A) = 0$. On a donc, pour toute matrice X de taille n , $\det(A + X) = \det(X)$. Ensuite, puisque A est équivalente à la matrice identité de taille $r = \text{rg}(A)$, on a $A = P I_r Q$, avec P et Q inversibles de taille n . En prenant X de la forme PYQ , avec Y de taille n quelconque, on trouve

$$\det(P(I_r + Y)Q) = \det(PYQ) \Rightarrow \det(I_r + Y) = \det(Y)$$

pour toute matrice Y de taille n .

Supposons $r > 0$. Alors la matrice Y , diagonale, ayant ses r premiers coefficients égaux à -1 et ses $n - r$ derniers coefficients égaux à 1 , est de déterminant $(-1)^r$, mais $I_r + Y$, qui est diagonale, ayant ses r premiers coefficients égaux à 0 , est de déterminant 0 , ce qui contredit l'égalité $\det(I_r + Y) = \det(Y)$. On en conclut que $r = 0$, donc que A est nulle.

Exercice 8 :

Soit A une matrice carrée antisymétrique de taille n . Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible. Cette conclusion reste-t-elle vraie lorsque n est pair ?

Solution: On sait que $\det({}^tA) = \det(A)$, et puisque ${}^tA = -A$, on obtient, lorsque n est impair,

$$\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A).$$

Ainsi $\det(A) = 0$, ce qui signifie que A n'est pas inversible. Ceci ne reste pas vrai lorsque n est pair, comme on le constate en considérant la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Exercice 9 :

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires entre des espaces vectoriels E , F et G de dimension finie.

- (i) Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.
- (ii) En déduire que si A est une matrice ayant n lignes et p colonnes et B est une matrice ayant p lignes et n colonnes, avec $p \neq n$, alors l'une au moins des deux matrices AB et BA a pour déterminant 0.
- (iii) Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres complexes. Calculer le déterminant de la matrice de taille n ayant pour élément $a_i b_j$ en position (i, j) .

Solution:

(i) On a $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$, donc $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$. Ensuite, si $r = \text{rg}(g \circ f) = \dim(\text{Im}(g \circ f))$, soit $(v_1, \dots, v_r)$ une base de $\text{Im}(g \circ f)$, qu'on écrit $v_i = g \circ f(u_i) = g(f(u_i))$, avec $u_i \in E$. Alors la famille $(f(u_1), \dots, f(u_r))$ est libre, et puisque les $f(u_i)$ sont des éléments de $\text{Im}(f)$, on a $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) \geq r = \text{rg}(g \circ f)$. On a donc $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$ et $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$, ce qui montre bien que $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.

(ii) Quitte à permuter p et n , on peut supposer $p < n$. Alors le rang de chacune des deux matrices A et B est inférieur ou égal à p . La question précédente donne alors que AB , qui est de taille n , est de rang inférieur ou égal à p , donc est non inversible. Par conséquent, AB est de déterminant 0.

(iii) On remarque que la matrice de taille n ayant pour élément $a_i b_j$ en position (i, j) n'est rien d'autre que

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n).$$

C'est donc le produit d'une matrice de taille $n \times 1$ par une matrice de taille $1 \times n$. On en déduit que son déterminant est $a_1 b_1$ si $n = 1$, et (par la question précédente) 0 si $n \geq 2$.

Exercice 10 :

Soient $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice de terme général $s_{\min(i,j)}$, pour $1 \leq i, j \leq n$.

Solution: Ce déterminant s'écrit

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = \begin{vmatrix} s_1 & s_1 & s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ s_1 & s_2 & s_2 & \dots & \dots & s_2 \\ s_1 & s_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & \dots & s_{n-1} & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & \dots & s_{n-1} & s_n \end{vmatrix}.$$

En faisant $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, on trouve

$$\begin{aligned} D_n(s_1, \dots, s_n) &= \begin{vmatrix} s_1 & s_1 & s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 & s_2 - s_1 & \dots & \dots & s_2 - s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & s_2 - s_1 & \dots & \dots & s_{n-1} - s_1 & s_{n-1} - s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 & \dots & \dots & s_{n-1} - s_1 & s_n - s_1 \end{vmatrix} \\ &= s_1 D_{n-1}(s_2 - s_1, \dots, s_n - s_1). \end{aligned}$$

On en déduit, par récurrence immédiate sur n , que

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1}) = \prod_{i=1}^n (s_i - s_{i-1})$$

avec la convention $s_0 = 0$.

Remarque : on aurait aussi pu, en faisant $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, obtenir un déterminant triangulaire, avec pour coefficients diagonaux $s_1, s_2 - s_1, \dots, s_n - s_{n-1}$, afin de retrouver le résultat ci-dessus.

Exercice 11 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq b$. On définit une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ par

$$M := \begin{pmatrix} c & a & \dots & \dots & a \\ b & c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c & a \\ b & \dots & \dots & b & c \end{pmatrix}.$$

- (i) Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \det(M + tJ)$, où $J \in M_n(\mathbb{C})$ a tous ses coefficients égaux à 1, est un polynôme dont on déterminera le degré.
- (ii) En déduire la valeur de $\det(M)$.

- (iii) Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} c & b & \dots & \dots & b \\ b & c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c & b \\ b & \dots & \dots & b & c \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

Solution:

(i) On a

$$\det(M + tJ) = \begin{vmatrix} c+t & a+t & \dots & \dots & a+t \\ b+t & c+t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+t & a+t \\ b+t & \dots & \dots & b+t & c+t \end{vmatrix}.$$

Les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_1$, pour $2 \leq i \leq n$, donnent

$$\det(M + tJ) = \begin{vmatrix} c+t & a-c & \dots & \dots & \dots & a-c \\ b+t & c-b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-b & a-c \\ b+t & 0 & \dots & \dots & 0 & c-b \end{vmatrix}.$$

En développant selon la première colonne, on trouve que $\varphi(t) = \det(M + tJ)$ est bien une fonction affine de t .

(ii) Une fonction affine est déterminée par sa valeur en deux points distincts. On a

$$\varphi(-a) = \begin{vmatrix} c-a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b-a & c-a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c-a & 0 \\ b-a & \dots & \dots & b-a & c-a \end{vmatrix} = (c-a)^n$$

et de même $\varphi(-b) = (c-b)^n$. On trouve alors

$$\varphi(t) = \frac{\varphi(-a) - \varphi(-b)}{b-a}(t+a) + \varphi(-a) = \frac{(c-a)^n - (c-b)^n}{b-a}(t+a) + (c-a)^n.$$

Le déterminant de M , qui est $\varphi(0)$, s'en déduit :

$$\det(M) = \varphi(0) = a \frac{(c-a)^n - (c-b)^n}{b-a} + (c-a)^n = \frac{b(c-a)^n - a(c-b)^n}{b-a}.$$

(iii) Le déterminant recherché est la limite de celui obtenu précédemment lorsque $a \rightarrow b$ (le déterminant, comme toute application polynomiale en plusieurs variables, est continu, ce qui permet ce raisonnement). Il vaut ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow b} \left(a \frac{(c-a)^n - (c-b)^n}{b-a} + (c-a)^n \right) &= (c-b)^n - b \lim_{a \rightarrow b} \frac{(c-b)^n - (c-a)^n}{b-a} \\ &= (c-b)^n + b \lim_{a \rightarrow b} \sum_{k=0}^{n-1} (c-b)^k (c-a)^{n-1-k} \\ &= (c-b)^n + nb(c-b)^{n-1} \\ &= (c-b)^{n-1}(c + (n-1)b). \end{aligned}$$

Remarque : On pouvait également contourner le calcul de la question (i) en remplaçant la première colonne par la somme de toutes les colonnes (qui vaut $c + (n-1)b$) puis en faisant $L_i \leftarrow L_i - L_1$, pour $i \geq 2$, afin d'obtenir un déterminant triangulaire.

Exercice 12 : Déterminant circulant

Soient $n \geq 2$ et $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On souhaite calculer le déterminant de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \dots & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

On note $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $\Omega = \left(\omega^{(p-1)(q-1)} \right)_{1 \leq p, q \leq n}$.

(i) Montrer que le coefficient à la p -ième ligne et à la q -ième colonne de la matrice $A\Omega$ est $\omega^{(p-1)(q-1)} P(\omega^{q-1})$, où P désigne le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

(ii) En déduire que

$$\det(A\Omega) = \left(\prod_{q=1}^n P(\omega^{q-1}) \right) \det \Omega, \quad \text{puis que} \quad \det A = \prod_{q=1}^n P(\omega^{q-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k).$$

(iii) Application : calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & \ddots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & 4 & \ddots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$. [On pourra penser à interpréter le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k$ comme un polynôme dérivé.]

Solution:

(i) La p -ième ligne de A est

$$(a_{n-p+1} \ a_{n-p+2} \ \cdots \ a_{n-1} \ a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{n-p}).$$

Le coefficient à la p -ième ligne et à la q -ième colonne de la matrice $A\Omega$ est donc

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{p-1} a_{n-p+k} \omega^{(k-1)(q-1)} + \sum_{k=p}^{n-1} a_{k-p} \omega^{(k-1)(q-1)} \\ &= \omega^{(p-1)(q-1)} \sum_{k=0}^{p-1} a_{n-p+k} \omega^{(n+k-p)(q-1)} + \omega^{(p-1)(q-1)} \sum_{k=p}^{n-1} a_{k-p} \omega^{(k-p)(q-1)} \end{aligned}$$

où dans la première somme, on a utilisé que $\omega^n = 1$. Le coefficient cherché est donc

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{p-1} a_{n-p+k} \omega^{(k-1)(q-1)} + \sum_{k=p}^{n-1} a_{k-p} \omega^{(k-1)(q-1)} \\ &= \omega^{(p-1)(q-1)} \left(\sum_{k=p}^{n-1} a_{k-p} \left(\omega^{(q-1)} \right)^{k-p} + \sum_{k=0}^{p-1} a_{n-p+k} \left(\omega^{(q-1)} \right)^{n+k-p} \right) \\ &= \omega^{(p-1)(q-1)} \left(\sum_{j=0}^{n-p-1} a_j \left(\omega^{(q-1)} \right)^j + \sum_{j=n-p}^{n-1} a_j \left(\omega^{(q-1)} \right)^j \right) \\ &= \omega^{(p-1)(q-1)} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\omega^{(q-1)} \right)^j = \omega^{(p-1)(q-1)} P(\omega^{q-1}), \end{aligned}$$

comme annoncé.

(ii) En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de Ω , la question précédente montre que les colonnes de la matrice $A\Omega$ sont $P(1)C_1, P(\omega)C_2, \dots, P(\omega^{n-1})C_n$. Par multilinéarité du déterminant, on trouve bien

$$\det(A\Omega) = \left(\prod_{q=1}^n P(\omega^{q-1}) \right) \det \Omega.$$

Le déterminant de Ω est le déterminant de Vandermonde associé à $(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$, qui est non nul, puisque les ω^k sont tous distincts pour $0 \leq k \leq n-1$. On a donc

$$\det A = \prod_{q=1}^n P(\omega^{q-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k).$$

(iii) D'après la question précédente, si $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k$, on a $D_n = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$. On remarque que $P(X) = Q'(X)$, où $Q(X) = \sum_{k=0}^n X^k = (1 - X^{n+1})/(1 - X)$, de sorte que

$$\forall z \neq 1, \quad P(z) = \frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}.$$

Il s'ensuit que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$P(\omega^k) = \frac{1 - (n+1)\omega^{nk} + n\omega^{n(k+1)}}{(1 - \omega^k)^2} = \frac{-n + n\omega^k}{(1 - \omega^k)^2} = \frac{n}{\omega^k - 1}.$$

Etant donné que $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k)$ est la valeur en 1 du polynôme $1 + X + \dots + X^{n-1}$, on déduit de ceci que

$$\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega^k) = (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k)} = (-1)^{n-1} n^{n-2}$$

et donc

$$D_n = P(1) \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega^k) = (-1)^{n-1} n^{n-1} \frac{n+1}{2}.$$

Remarque : Puisqu'on a aussi

$$\omega^k - 1 = e^{2ik\pi/n} - 1 = e^{ik\pi/n} \times 2i \sin(k\pi/n)$$

on constate au passage que

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} n^{n-2} &= \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega^k) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{-ik\pi/n} \frac{n}{2i \sin(k\pi/n)} \right) = \frac{e^{-i(n-1)\pi/2}}{i^{n-1}} \left(\frac{n}{2} \right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(k\pi/n)} \\ &= (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{2} \right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(k\pi/n)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 13 :

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Le but de l'exercice est de montrer que A et B sont en fait semblables sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$.

- (i) On écrit $P = R + iS$, avec R et $S \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(R + tS) = (R + tS)B$.
- (ii) Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $R + tS$ est inversible.
- (iii) En déduire qu'il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$.

Solution:

(i) L'équation $A = PBP^{-1}$ donne $AP = PB$, soit $A(R + iS) = (R + iS)B$, ou encore $AR - RB = i(SB - AS)$. Le membre de gauche est une matrice à coefficients réels, celui de droite est une matrice à coefficients imaginaires purs, donc $AR = RB$ et $SB = AS$. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$A(R + tS) = AR + tAS = RB + tSB = (R + tS)B$$

comme annoncé.

(ii) Si $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de R et $D_1, \dots, D_n$ sont les colonnes de S , on a

$$\det(R + tS) = \det(C_1 + tD_1, C_2 + tD_2, \dots, C_n + tD_n).$$

La multilinéarité du déterminant donne que cette expression est un polynôme en t à coefficients réels, de degré $\leq n$ (dont le coefficient en t^n est $\det(D_1, D_2, \dots, D_n)$). Ce polynôme est non identiquement nul, puisque $\det(R + iS) = \det(P) \neq 0$. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + tS)$ soit non nul, pour lequel $R + tS$ est inversible.

(iii) On a vu que $A(R + tS) = (R + tS)B$ pour tout t réel. Si $t = t_0 \in \mathbb{R}$ est tel que $Q = R + t_0S$ est inversible comme à la question précédente, alors $AQ = QB$ implique $A = QBQ^{-1}$, et Q est à coefficients réels.

Exercice 14 :

Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et le cas échéant, déterminer son inverse.

Solution: En faisant $C_2 \leftarrow C_2 - \alpha C_1$ puis en développant selon la première ligne, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1-2\alpha & \alpha \\ 3 & -3\alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-2\alpha & \alpha \\ -3\alpha & 1 \end{vmatrix} = 3\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 3(\alpha - 1)(\alpha + 1/3).$$

La matrice A est donc inversible si et seulement si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -1/3$. La comatrice de A est la matrice formée des cofacteurs de A , soit

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3\alpha - 2 & 3 \\ -\alpha & 1 & 3\alpha \\ \alpha^2 & -\alpha & -1 - 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Dans le cas $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -1/3$, l'inverse de A vaut donc

$$\frac{1}{\det(A)} {}^t \text{com}(A) = \frac{1}{3(\alpha - 1)(\alpha + 1/3)} \begin{pmatrix} -1 & -\alpha & \alpha^2 \\ 3\alpha - 2 & 1 & -\alpha \\ 3 & 3\alpha & -1 - 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 :

Si A est une matrice carrée de taille n , déterminer $\det(\text{com}(A))$ en fonction de $\det(A)$.

Solution: On sait que $A {}^t\text{com}(A) = \det(A)I_n$, donc $\det(A) \det({}^t\text{com}(A)) = (\det(A))^n$, ce qui donne $\det(A) \det(\text{com}(A)) = (\det(A))^n$.

Si A est inversible, on obtient immédiatement $\det(\text{com}(A)) = (\det(A))^{n-1}$.

Si A n'est pas inversible, alors l'égalité $A {}^t\text{com}(A) = \det(A)I_n$ donne $A {}^t\text{com}(A) = 0$. La matrice $\text{com}(A)$ ne peut donc pas être inversible, sinon on aurait $A = 0$ (et donc $\text{com}(A) = 0$, qui n'est pas inversible). On en déduit que $\det(\text{com}(A)) = 0 = (\det(A))^{n-1}$.

On conclut de cette disjonction de cas que $\det(\text{com}(A)) = (\det(A))^{n-1}$.

Exercice 16 :

On suppose qu'une matrice A , à coefficients entiers, est inversible. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que A^{-1} soit à coefficients entiers.

Solution: Supposons que A^{-1} soit à coefficients entiers. Alors $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ est entier. Puisque $\det(A)$ l'est aussi, on déduit que $\det(A) = 1$ ou -1 .

Réciproquement, si $\det(A) = 1$ ou -1 , alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{com}(A) = \text{com}(A) \text{ ou } -\text{com}(A)$$

est à coefficients entiers, puisque les coefficients de $\text{com}(A)$ sont les cofacteurs de A (qui sont des entiers puisque des déterminants de matrices extraites de A , à coefficients entiers).

La condition nécessaire et suffisante recherchée est donc que $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 17 :

Résoudre les systèmes d'équations suivants via la règle de Cramer.

- (i) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= -1 \\ -7x_1 + 4x_2 &= 47 \end{cases}$
- (ii) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 11 \end{cases}$
- (iii) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_3 + 6x_4 &= 3 \\ x_1 - x_4 &= 5 \end{cases}$

Solution:

(i) On a

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = 29$$

donc la solution du système est

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{29} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 47 & 4 \end{vmatrix}, \frac{1}{29} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 47 \end{vmatrix} \right) = (-5, 3).$$

(ii) On a

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

donc la solution du système est

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{25} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 11 & 2 & 5 \end{vmatrix}, -\frac{1}{25} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 8 & 11 & 5 \end{vmatrix}, -\frac{1}{25} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \\ 8 & 2 & 11 \end{vmatrix} \right) = (2, 5, -3).$$

(iii) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

donc la solution du système est

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}, \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right) \\ = \left(\frac{10}{3}, 0, \frac{13}{3}, -\frac{5}{3} \right).$$

Exercice 18 :

Résoudre les systèmes d'équations suivants et discuter la nature de l'ensemble des solutions selon les valeurs du(des) paramètre(s).

$$(i) \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} -4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 = 3 - \lambda \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1 \\ \lambda x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 = \mu \end{cases}$$

Solution:

(i) On a

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 - \lambda^2 & 1 - \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 \\ -(\lambda - 1) & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Si $\lambda \notin \{1, -2\}$, le système est de rang plein et a pour unique solution

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} \right) \\ = \left(-\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}, \frac{1}{\lambda + 2}, \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2} \right).$$

Si $\lambda = 1$, le système se réduit à $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, qui est l'équation du plan affine de $\mathbb{R}^3$ passant par $(1, 0, 0)$ et dirigé par les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(1, 0, -1)$.

Si $\lambda = -2$, le système est

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{cases}$$

et ce système est incompatible, donc il n'y a aucune solution.

(ii) On a

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

donc le système n'est pas de rang plein. On a

$$\begin{cases} -4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 &= 3 - \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_3 &= 1 \\ 0 &= 5 - \lambda \end{cases} \quad \text{en calculant } L_1 + 3L_2 + 2L_3.$$

On en déduit que si $\lambda \neq 5$, le système est incompatible et n'a donc aucune solution. Sinon, le système devient

$$\begin{cases} -4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_3 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x_3 \end{cases}$$

qui est l'équation de la droite affine passant par $(1/2, -1/4, 0)$ et dirigée par $(2, 3, 4)$.

(iii) Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 &= 1 \\ (\lambda - 3/2)x_1 &= -1/2 \\ (\lambda - 4/3)x_2 &= \mu - 1/3 \end{cases}$$

Le système est donc incompatible si $\lambda = 3/2$. Si $\lambda = 4/3$, il est incompatible sauf si $\mu = 1/3$, auquel cas il donne l'unique solution $(x_1, x_2) = (3, -2)$. Si $\lambda \notin \{4/3, 3/2\}$, le système équivaut à

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 &= 1 \\ x_1 &= 1/(3 - 2\lambda) \\ x_2 &= (3\mu - 1)/(3\lambda - 4) \end{cases}$$

La première équation donne alors la condition de compatibilité $\mu = (\lambda^2 - 2)/(2(2\lambda - 3))$. Par conséquent, si $\lambda \notin \{4/3, 3/2\}$, le système est incompatible sauf si $\mu = (\lambda^2 - 2)/(2(2\lambda - 3))$, auquel cas le système a l'unique solution $(x_1, x_2) = (-1/(2\lambda - 3), \lambda/(2(2\lambda - 3)))$.