Université d'Angers
L2 Math, DL Math-Eco & DL Math-Info
Luc Menichi & William Fremont

Fiche d'exercices 2 - Déterminants

Exercice 1 : Diagonalisation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de f et donner une base de chacun d'eux.

(c) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale

Exercice 2 : Diagonalisation

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -15 & 10 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de f et donner une base de chacun d'eux.

(c) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale

Exercice 3 : Déterminant de Vandermonde

On se donne $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ et on pose

$$\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Démontrer que

$$\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

[Indication : Montrer que si $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont distincts deux à deux alors $\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x)$ est un polynôme de degré $\leq n-1$ qui admet x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ comme racines.]

Exercice 4 : Déterminant de Vandermonde, encore

Soient $n \geq 1$ et $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer par récurrence sur n qu'il existe une suite de polynômes (P_n) à coefficients réels tels que, pour tout $n \geq 1$, $\deg P_n = n$ et $\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta)$. Quel est le coefficient dominant de P_n ? [Les polynômes P_n sont appelés polynômes de Tchebychev.]

(ii) Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & \dots & \cos(\theta_n) \\ \cos(2\theta_1) & \cos(2\theta_2) & \dots & \cos(2\theta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos((n-1)\theta_1) & \cos((n-1)\theta_2) & \dots & \cos((n-1)\theta_n) \end{vmatrix}.$$

Exercice 5 :

On se donne une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$, pour $n \geq 2$. On pose $f_i = e_i + e_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $f_n = e_n + e_1$. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est-elle une base de $\mathbb{C}^n$?

Exercice 6 :

Soit $n \geq 2$. Trouver toutes les matrices A de taille n telles que, pour toute matrice X de taille n, $\det(A+X) = \det(A) + \det(X)$. [On pourra se rappeler que toute matrice A de taille n est équivalente à la matrice identité de taille $r = \mathrm{rg}(A)$.]

Exercice 7 :

Soit A une matrice carrée antisymétrique de taille n. Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible. Cette conclusion reste-t-elle vraie lorsque n est pair ?

Exercice 8 :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires entre des espaces vectoriels E, F et G de dimension finie.

(i) Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.

(ii) En déduire que si A est une matrice ayant n lignes et p colonnes et B est une matrice ayant p lignes et n colonnes, avec $p \neq n$, alors l'une au moins des deux matrices AB et BA a pour déterminant 0.

(iii) Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres complexes. Calculer le déterminant de la matrice de taille n ayant pour élément $a_i b_j$ en position (i, j).

Exercice 9 :

Soient $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice de terme général $s_{\min(i,j)}$, pour $1 \leq i, j \leq n$.

Exercice 10 :

Soient a, b, $c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq b$. On définit une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$M := \begin{pmatrix} c & a & \dots & \dots & a \\ b & c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c & a \\ b & \dots & \dots & b & c \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \det(M + tJ)$, où $J \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ a tous ses coefficients égaux à 1, est un polynôme dont on déterminera le degré.

(ii) En déduire la valeur de $\det(M)$.

(iii) Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} c & b & \dots & \dots & b \\ b & c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c & b \\ b & \dots & \dots & b & c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Exercice 11 : Déterminant circulant

Soient $n \geq 2$ et $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On souhaite calculer le déterminant de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \dots & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

On note $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $\Omega = \left(\omega^{(p-1)(q-1)}\right)_{1 \leq p,q \leq n}$.

(i) Montrer que le coefficient à la p-ième ligne et à la q-ième colonne de la matrice $A\Omega$ est $\omega^{(p-1)(q-1)} P(\omega^{q-1})$, où P désigne le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

(ii) En déduire que

$$\det(A\Omega) = \left(\prod_{q=1}^{n} P(\omega^{q-1}) \right) \det \Omega, \quad \text{puis que} \quad \det A = \prod_{q=1}^{n} P(\omega^{q-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k).$$

(iii) Application : calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & \ddots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & 4 & \ddots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

[On pourra penser à interpréter le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) X^k$ comme un polynôme dérivé.]

Exercice 12 :

Soient A et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Le but de l'exercice est de montrer que A et B sont en fait semblables sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$.

(i) On écrit $P = R + iS$, avec R et $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(R + tS) = (R + tS)B$.

(ii) Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $R + tS$ est inversible.

(iii) En déduire qu'il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$.

Exercice 13 :

Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et le cas échéant, déterminer son inverse.

Exercice 14 :

Si A est une matrice carrée de taille n, déterminer $\det(\mathrm{com}(A))$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice 15 :

On suppose qu'une matrice A, à coefficients entiers, est inversible. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que A^{-1} soit à coefficients entiers.

Exercice 16 :

Résoudre les systèmes d'équations suivants via la règle de Cramer.

(i) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = -1 \\ -7x_1 + 4x_2 & = 47 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 & = 5 \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = 11 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 6 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 & = 4 \\ 3x_3 + 6x_4 & = 3 \\ x_1 - x_4 & = 5 \end{cases}$

Exercice 17 :

Résoudre les systèmes d'équations suivants et discuter la nature de l'ensemble des solutions selon les valeurs du(des) paramètre(s).

(i) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 & = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 & = \lambda^2 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} -4x_2 + 3x_3 & = 1 \\ 2x_1 - x_3 & = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 & = 3 - \lambda \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 & = 1 \\ \lambda x_1 + 2x_2 & = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 & = \mu \end{cases}$