Université d'Angers **P8-P9 2024-25**
L2 Math, DL Math-Eco & DL Math-Info **Diagonalisation - P8**
Luc Menichi & William Fremont

Fiche d'exercices 1 - Déterminants

Exercice 1 : Révisions d'algèbre linéaire - questions générales

Vrai ou faux ? Si l'affirmation est vraie, la démontrer, et sinon, donner un contre-exemple.

(i) Soient u et v deux vecteurs d'un espace vectoriel E. Alors $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u, u + v) = \mathrm{Vect}(u - v, u + v)$.

(ii) Si (u, v, w) est une famille libre dans un espace vectoriel E, alors la famille $(u, v + u, w + v + u)$ est libre.

(iii) Si u, v, w sont des vecteurs deux à deux non colinéaires dans un espace vectoriel E de dimension 3, alors ils engendrent E.

(iv) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux familles finies d'éléments de E, l'une libre et l'autre génératrice. Alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont le même nombre n d'éléments.

(v) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(vi) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(vii) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, de dimension finie. Si $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

(viii) Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ linéaire. Alors f est injective si et seulement si elle est surjective.

(ix) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Alors f est injective si et seulement si elle est surjective.

(x) Soient E et F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ linéaire, et $\mathcal{F}$ une famille finie d'éléments de E. Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $f(\mathcal{F})$ est libre.

(xi) Soient E et F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ linéaire, et $\mathcal{F}$ une famille finie d'éléments de E. Si $\mathcal{F}$ est liée, alors $f(\mathcal{F})$ est liée.

(xii) Soient E et F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ linéaire, et $\mathcal{F}$ une famille finie d'éléments de E. Si $f(\mathcal{F})$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est libre.

(xiii) Soient E et F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ linéaire, et $\mathcal{F}$ une famille finie d'éléments de E. Si $f(\mathcal{F})$ est liée, alors $\mathcal{F}$ est liée.

(xiv) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ deux familles de taille n d'éléments distincts. Alors il existe un endomorphisme de E envoyant u_i sur v_i, pour tout $1 \leq i \leq n$.

(xv) Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications linéaires, alors $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

(xvi) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors $\dim(E) = \mathrm{rg}(f) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Solution:

(i) Vrai. On se rappelle d'abord que, si x et y sont deux éléments de E, alors $\mathrm{Vect}(x, y)$, l'ensemble des combinaisons linéaires de x et y, est le plus petit sous-espace vectoriel contenant x et y ; en particulier, si x et y appartiennent à un sous-espace vectoriel F de E, alors $\mathrm{Vect}(x, y) \subset F$. Montrons l'égalité $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u, u + v)$ par double inclusion. Comme $u = 1 \cdot u + 0 \cdot v \in \mathrm{Vect}(u, v)$ et $u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v \in \mathrm{Vect}(u, v)$, on a, $\mathrm{Vect}(u, u+v) \subset \mathrm{Vect}(u, v)$. Et puisque $v = (u+v)-u$, on a $\mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathrm{Vect}(u, u+v)$, donc $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u, u + v)$. De la même façon, $\mathrm{Vect}(u - v, u + v) \subset \mathrm{Vect}(u, v)$, et puisque $u = ((u+v)+(u-v))/2$ et $v = ((u+v)-(u-v))/2$, on a $\mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathrm{Vect}(u-v, u+v)$, donc $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u - v, u + v)$.

(ii) Vrai. Si a, b, c sont trois scalaires tels que $au + b(v + u) + c(w + v + u) = 0$, alors $(a+b+c)u + (b+c)v + cw = 0$, et puisque la famille (u, v, w) est libre, on a $a+b+c = 0$, $b + c = 0$ et $c = 0$, ce qui donne immédiatement $a = b = c = 0$.

(iii) Faux. Prendre $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = u + v = (2, 2, 1)$.

(iv) Faux. Prendre $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}$ la famille réduite à l'élément $u = (1, 0)$ et $\mathcal{G}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(v) Faux. Prendre $E = \mathbb{R}^2$, F la droite engendrée par le vecteur $(1, 0)$, et G la droite engendrée par le vecteur $(0, 1)$. [On peut montrer qu'en fait $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.]

(vi) Vrai. L'élément $0 = 0 + 0$ appartient à $F + G$, et si x, y appartiennent à $F + G$ et λ est un scalaire, alors, en posant $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ et $y = u' + v'$ avec $u' \in F$ et $v' \in G$, on a $x + \lambda y = u + \lambda u' + v + \lambda v'$. Puisque $u + \lambda u' \in F$ et $v + \lambda v' \in G$, on a $x + \lambda y \in F + G$, ce qui montre bien que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(vii) Faux. Prendre $E = \mathbb{R}^2$, F la droite engendrée par le vecteur $(1, 0)$, G la droite engendrée par le vecteur $(0, 1)$, et H la droite engendrée par le vecteur $(1, 1)$.

Remarque : la somme de sous-espaces vectoriels est une loi de composition interne associative, commutative admettant le sous-espace vectoriel $\{0\}$ comme élément neutre. Le problème est que, pour cette loi, aucun sous-espace vectoriel non trivial n'a d'opposé ! De la même manière, l'intersection de sous-espaces vectoriels de E est une loi de composition interne associative, commutative admettant E comme élément neutre, sans qu'un sous-espace vectoriel n'ait d'opposé pour cette loi. [Contrairement à de nombreux autres exemples usuels, comme l'addition de réels, la multiplication et l'inversion de réels non nuls, l'addition modulo un nombre entier, la multiplication modulo un nombre premier...]

(viii) Faux. Prendre $E = \mathbb{R}^2$, F la droite engendrée par le vecteur $(1, 0)$, et G la droite engendrée par le vecteur $(0, 1)$.

(ix) Faux. Prendre $E = \mathbb{R}$, $F = \{0\}$, et f l'application linéaire nulle.

(x) Vrai. Par le théorème du rang, on a $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$. L'injectivité de f équivaut à $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, donc à $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$, et donc à $\mathrm{Im}(f) = E$, ce qui n'est rien d'autre que la surjectivité de f.

(xi) Faux. L'image de toute famille par l'application linéaire nulle est la famille constituée de vecteurs nuls, qui est liée.

(xii) Vrai. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille liée d'éléments de E, de sorte qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0$. Par linéarité, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(u_i) = f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i) = 0$, donc la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_p))$ est liée.

(xiii) Vrai. Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille d'éléments de E telle que $(f(u_1),\dots,f(u_p))$ soit libre. Si $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont des scalaires, la relation $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0$ implique $\sum_{i=1}^p \lambda_i f(u_i) = f(\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i) = 0$ par linéarité, et puisque $(f(u_1),\dots,f(u_p))$ est libre, on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$, ce qui montre bien que $(u_1,\dots,u_p)$ est libre.

(xiv) Faux. L'image de toute famille par l'application linéaire nulle est la famille constituée de vecteurs nuls, qui est liée.

(xv) Faux. Prendre $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ la famille réduite à l'élément 0, $\mathcal{G}$ la famille réduite à l'élément 1. Tout endomorphisme f de E envoie 0 sur 0 (et jamais sur 1).

(xvi) Vrai. Si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0$ et donc $g \circ f(x) = 0$, ce qui signifie que $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, soit $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Si $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, alors on peut écrire $y = g \circ f(x) = g(f(x))$, pour un certain $x \in E$, et donc $y \in \mathrm{Im}(g)$, ce qui donne bien $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

(xvii) Faux. Le théorème du rang affirme au contraire que $\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Exercice 2 : Révisions d'algèbre linéaire - changement de base

Soit $n \geq 2$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient a un nombre réel non nul et $u_i = a^i e_i$, pour $1 \leq i \leq n$. Donner la matrice de f dans la base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Solution: On a, quel que soit $j \in \{1,\dots,n\}$,

$$f(e_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} e_i.$$

Donc

$$f(u_j) = f(a^j e_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a^j e_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a^{j-i} u_i.$$

Ceci signifie que, dans la base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, f admet pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 & \cdots & \cdots & a^{n-1} \\ 1/a & 0 & a & \cdots & \cdots & a^{n-2} \\ 1/a^2 & 1/a & 0 & \ddots & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1/a^{n-2} & \cdots & \cdots & 1/a & 0 & a \\ 1/a^{n-1} & 1/a^{n-2} & \cdots & \cdots & 1/a & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : Sommation sur les colonnes

Soit φ une forme $n-$linéaire alternée sur un espace vectoriel E. Soient $x_1, \ldots, x_n \in E$. On pose

$$y_i = \sum_{k \neq i} x_k = x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n.$$

(i) Calculer $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ en fonction de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ pour $n = 2$ et $n = 3$.

(ii) Calculer $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ dans le cas général. [On pourra calculer la somme des y_i.]

Solution:

(i) Dans le cas $n = 2$, $y_1 = x_2$ et $y_2 = x_1$, donc $\varphi(y_1, y_2) = \varphi(x_2, x_1) = -\varphi(x_1, x_2)$. Dans le cas $n = 3$, on a, puisque φ est linéaire en chaque argument et alternée,

$$\begin{aligned}
\varphi(y_1, y_2, y_3) &= \varphi(x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2) \\
&= \varphi(x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_2) + \varphi(x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2) \\
&= \varphi(x_2, x_3, x_1 + x_2) + \varphi(x_3, x_1, x_1 + x_2) \\
&= \varphi(x_2, x_3, x_1) + \varphi(x_3, x_1, x_2) \\
&= \varphi(x_1, x_2, x_3) + \varphi(x_1, x_2, x_3) = 2\varphi(x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}$$

(ii) On a, puisque φ est alternée et linéaire en son premier argument,

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) = \varphi(y_1 + y_2 + \cdots + y_n, y_2, \ldots, y_n) = \varphi\left((n-1)\sum_{k=1}^{n} x_k, y_2, \ldots, y_n\right).$$

Toujours par linéarité en le premier argument,

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) = (n-1)\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, y_2, \ldots, y_n\right).$$

Ensuite $y_i - \sum_{k=1}^{n} x_k = -x_i$, donc par linéarité en chaque argument,

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) = (n-1)\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, -x_2, \ldots, -x_n\right) = (-1)^{n-1}(n-1)\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, x_2, \ldots, x_n\right).$$

Enfin, en utilisant le caractère alterné de φ, on obtient

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) = (-1)^{n-1}(n-1)\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Exercice 4 : Unicité du déterminant

Soient E un espace vectoriel de dimension n, φ une forme n-linéaire sur E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Dans tout l'exercice, on fixe une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de n vecteurs de E et on note, pour tout j, $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. On appelle enfin *permutation* de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ toute bijection σ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même. L'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ est noté S_n.

(i) Montrer que

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{f:\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}} a_{f(1)1} a_{f(2)2} \ldots a_{f(n)n} \varphi(e_{f(1)}, \ldots, e_{f(n)})$$

où la somme porte sur l'ensemble des applications f de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même.

On suppose désormais que φ est alternée.

(ii) Que vaut $\varphi(e_{f(1)}, \dots, e_{f(n)})$ si f n'est pas injectif ?

(iii) En déduire que

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Soit maintenant $\sigma \star \varphi : E^n \to \mathbb{K}$ l'application définie par $(\sigma \star \varphi)(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

(iv) Montrer que pour toutes σ_1, $\sigma_2 \in S_n$,

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2) \star \varphi = \sigma_1 \star (\sigma_2 \star \varphi).$$

(On dit que le groupe des permutations S_n agit à gauche sur l'ensemble des formes n-linéaires)

On admettra que toute permutation σ s'écrit comme la composée de p transpositions $\tau_1 \circ \tau_2 \cdots \circ \tau_p$ et que la parité de p est indépendante de la décomposition choisie. On appellera *signature de* σ, noté $\varepsilon(\sigma)$, le signe $(-1)^p$.

(v) Montrer que $\sigma \star \varphi = \varepsilon(\sigma)\varphi$.

(vi) En déduire que

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \right) \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Nous avons donc démontré les deux résultats du cours suivants :

— Deux formes n-linéaires alternées non nulles sur un espace vectoriel de dimension n sont toujours proportionnelles.

— Il existe donc au plus une seule forme n-linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ tel que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$. Sa formule est donnée par

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

C'est le déterminant de la famille $x_1, \dots, x_n$ de n vecteurs de E dans la base $\mathcal{B}$.

(vii) Montrer que pour toute permutation σ, pour toutes formes n-linéaires φ_1, φ_2, et pour tous réels α_1, α_2, $\sigma \star (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(\sigma \star \varphi_1) + \alpha_2(\sigma \star \varphi_2)$. (On dit que l'action du groupe des permutations S_n sur les formes n-linéaires est linéaire).

(viii) Soit m une forme n-linéaire sur E. Posons

$$a(m) := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \sigma \star m.$$

Montrer que la forme n-linéaire $a(m)$, appelée anti-symétrisée de m, est alternée.

(ix) En choisissant judicieusement m, déduire l'existence d'une forme n-linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ tel que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Solution: i) Démontrons par récurrence que

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i_1=1}^{n}a_{i_11}\left(\sum_{i_2=1}^{n}a_{i_22}\dots\left(\sum_{i_n=1}^{n}a_{i_nn}\varphi(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\right)\right)$$

Supposons vraie la formule pour les formes n-linéaires. Par linéarité par rapport à la première variable

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i_1=1}^{n}a_{i_11}\varphi(e_{i_1},x_2,\dots,x_n)$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\varphi(e_{i_1},x_2,\dots,x_n)=\sum_{i_2=1}^{n}a_{i_22}\dots\left(\sum_{i_n=1}^{n}a_{i_nn}\varphi(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,\dots,x_n)&=\sum_{i_1=1}^{n}a_{i_11}\left(\sum_{i_2=1}^{n}a_{i_22}\dots\left(\sum_{i_n=1}^{n}a_{i_nn}\varphi(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\right)\right)\\&=\sum_{1\le i_1,\dots,i_n\le n}a_{i_11}a_{i_22}\dots a_{i_nn}\varphi(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\end{aligned}$$

A tout n-uplet $(i_1,\dots,i_n)$ correspond une unique application f de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ dans lui-même donnée par $f(1)=i_1$, $f(2)=i_2$,…et $f(n)=i_n$. Donc

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{f:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}}a_{f(1)1}a_{f(2)2}\dots a_{f(n)n}\varphi(e_{f(1)},\dots,e_{f(n)}).$$

ii) Si f n'est pas injectif alors il existe $i<j$ tel que $f(i)=f(j)$. Donc $e_{f(i)}=e_{f(j)}$. Donc comme φ est alternée $\varphi(e_{f(1)},\dots,e_{f(i)},\dots,e_{f(j)},\dots,e_{f(n)})=0$.
iii) Donc la somme précédente se limite aux applications injectives. Une application injective entre deux ensembles de même cardinal est forcément surjective donc bijective. Donc la somme précédente se limite aux permutations σ.
iv) En posant $X_i=x_{\sigma_1(i)}$ pour tout i compris entre 1 et n,

$$(\sigma_1\star(\sigma_2\star\varphi))(x_1,\dots,x_n)=(\sigma_2\star\varphi)(x_{\sigma_1(1)},\dots,x_{\sigma_1(n)})=(\sigma_2\star\varphi)(X_1,\dots,X_n)$$

$$=\varphi(X_{\sigma_2(1)},\dots,X_{\sigma_2(n)})=\varphi(x_{\sigma_1(\sigma_2(1))},\dots,x_{\sigma_1(\sigma_2(n))})=((\sigma_1\circ\sigma_2)\star\varphi)(x_1,\dots,x_n).$$

v) Soit τ la transposition entre i et j pour $i<j$. Comme φ est anti-symétrique,

$$(\tau\star\varphi)(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n)$$

$$=\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\dots,x_n)$$

$$=-\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n).$$

Donc $\tau\star\varphi=-\varphi$. Démontrons par récurrence sur $p\geq 0$ que $(\tau_1\circ\tau_2\dots\circ\tau_p)\star\varphi=(-1)^p\varphi$.
Initialisation : $p=0$. $id\star\varphi=\varphi=(-1)^0\varphi$. Supposons que la formule est vraie pour $p-1$.
Alors d'après iv) puis par hypothèse de récurrence, puisque $\tau_p\star\varphi=-\varphi$,

$$(\tau_1\circ\tau_2\dots\circ\tau_p)\star\varphi=(\tau_1\dots\circ\tau_{p-1})\star(\tau_p\star\varphi)=(\tau_1\circ\tau_2\dots\circ\tau_{p-1})(-\varphi)=(-1)^{p-1}(-\varphi)=(-1)^p\varphi.$$

Donc finalement $\sigma \star \varphi = \varepsilon(\sigma)\varphi$.
vi) $\varphi(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = (\sigma \star \varphi)(e_1, \ldots, e_n) = \varepsilon(\sigma)\varphi(e_1, \ldots, e_n)$. Donc

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n} \varphi(e_1, \ldots, e_n).$$

Comme $\varphi(e_1, \ldots, e_n)$ ne dépend pas de σ, on peut le sortir de la somme.
vii) évident.
viii) Par vii) (linéarité de l'action) et iv)

$$-(\tau \star a(m)) = \sum_{\sigma \in S_n} (-\varepsilon(\sigma)) \tau \star (\sigma \star m) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\tau \circ \sigma)(\tau \circ \sigma) \star m.$$

L'application de S_n dans S_n qui envoie toute permutation σ sur $\sigma' = \tau \circ \sigma$ est une bijection Donc

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\tau \circ \sigma)(\tau \circ \sigma) \star m = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma')\sigma' \star m = a(m)$$

ix) Soit m la forme n-linéaire donnée par $m(x_1, \ldots, x_n) = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ si $\forall j$, $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.
Alors $(\sigma \star m)(x_1, \ldots, x_n) = m(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$.
Donc $a(m)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$ est une forme n-linéaire alternée.

$$a(m)(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \delta_{1\sigma(1)} \delta_{2\sigma(2)} \ldots \delta_{n\sigma(n)}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$ et 0 sinon. Si la permutation σ est différente de id, l'application identité alors il existe i tel $\sigma(i) \neq i$ et donc $\delta_{1\sigma(1)} \delta_{2\sigma(2)} \ldots \delta_{n\sigma(n)} = 0$.
Donc $a(m)(e_1, \ldots, e_n) = \varepsilon(id) \delta_{1id(1)} \delta_{2id(2)} \ldots \delta_{nid(n)} = 1$.

Exercice 5 :

Montrer, sans calcul, que quels que soient les scalaires $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, la matrice

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \alpha^2 & 2a + \alpha \\ b & \beta & \beta^2 & 2b + \beta \\ c & \gamma & \gamma^2 & 2c + \gamma \\ d & \delta & \delta^2 & 2d + \delta \end{pmatrix}$$

n'est jamais inversible.

Solution: La quatrième colonne de cette matrice est la somme de la deuxième et deux fois la première. Le déterminant de cette matrice est donc 0, ce qui signifie que la matrice n'est pas inversible.

Exercice 6 : Calculs de déterminants

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} \ , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \ , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \\ -1 & -1 & m \end{vmatrix} \ , \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} .$$

En déduire si les matrices

$$\begin{pmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \ , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix} \ , \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont inversibles.

Solution: Posons

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix} \ , \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On a directement

$$\begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$$

donc A est inversible si et seulement si m est différent de 2 et -2.
Ensuite

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

en faisant $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$ puis $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$. En développant selon la première colonne, on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

donc B est inversible.
En ce qui concerne la matrice C, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \\ -1 & -1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & m \\ 0 & -1 & m \end{vmatrix}$$

en faisant $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$. En développant selon la première colonne, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \\ -1 & -1 & m \end{vmatrix} = -(-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = 2(m+1)$$

donc C est inversible si et seulement si $m \neq -1$.

Enfin

$$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\-2&3&1&1\\0&1&3&1\\0&1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&1&1\\-2&2&1&1\\0&-2&3&1\\0&0&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0&1\\-2&2&0&1\\0&-2&2&1\\0&0&-2&3\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1&0&0&1\\-1&1&0&1\\0&-1&1&1\\0&0&-1&3\end{vmatrix}$$

en faisant successivement $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_4$, et en utilisant la linéarité du déterminant en chaque colonne. Ensuite, en faisant successivement $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$ sur ce dernier déterminant,

$$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&-1&1&1\\0&0&-1&3\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\\0&0&-1&3\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\\0&0&0&6\end{vmatrix}=48$$

donc D est inversible.

Exercice 7 : Bases et déterminants

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^4$?

(i) $\big\{(1,-1,1,0),\ (1,0,1,-1),\ (1,1,1,1),\ (0,0,1,1)\big\}$

(ii) $\big\{(1,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,1)\big\}$

Solution:

(i) On a

$$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\-1&0&1&0\\1&1&1&1\\0&-1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&-1&1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{vmatrix}$$

en faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et en développant par rapport à la troisième ligne. En faisant $C_3 \leftarrow C_3 + C_1 + C_2$ sur ce dernier déterminant, et en développant par rapport à la dernière colonne, on trouve

$$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\-1&0&1&0\\1&1&1&1\\0&-1&1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&3\\-1&0&0\\0&-1&0\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}-1&0\\0&-1\end{vmatrix}=-3$$

donc la famille $\big\{(1,-1,1,0),\ (1,0,1,-1),\ (1,1,1,1),\ (0,0,1,1)\big\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (puisque le déterminant de la matrice associée est non nul).

(ii) On a

$$\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}$$

en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et en développant par rapport à la première colonne. En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ sur ce dernier déterminant et en développant par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

donc la famille $\Big\{(1,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,1)\Big\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$ (puisque le déterminant de la matrice associée est nul).

Exercice 8 : Encore des calculs de déterminant

Calculer les déterminants suivants, où $n \geq 2$, $p \geq 0$ et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

(i) $\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}$

(v) $\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}$

Solution:

(i) En faisant $L_2 \leftarrow L_2 + aL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - bL_1$, on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ 0 & 1+a^2 & c-ab \\ 0 & -c-ab & 1+b^2 \end{vmatrix}.$$

En développant selon la première colonne, le déterminant cherché vaut $(1+a^2)(1+b^2) + (c+ab)(c-ab) = 1+a^2+b^2+c^2$.

(ii) En faisant $L_1 \leftarrow L_1 + aL_2$ puis en développant selon la première colonne, on obtient

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$$

En faisant maintenant $L_3 \leftarrow L_3 - dL_2$ dans ce dernier déterminant et en développant selon la dernière colonne, on trouve

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ d & -1-cd & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1+ab & a \\ d & -1-cd \end{vmatrix} = (1+ab)(1+cd) + ad.$$

(iii) En faisant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, on trouve

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & d & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix}.$$

En faisant ensuite $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ et en développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}.$$

En faisant maintenant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ et $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$, on trouve

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} &= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a+d-(b+c) & d-c & 0 \\ a+d-(b+c) & a-c & a+b-(c+d) \\ 0 & b-c & a+b-(c+d) \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c+d)(a+b-(c+d))(a+d-(b+c)) \begin{vmatrix} 1 & d-c & 0 \\ 1 & a-c & 1 \\ 0 & b-c & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En faisant enfin $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ dans ce dernier déterminant et en développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} &= (a+b+c+d)(a+b-(c+d))(a+d-(b+c)) \begin{vmatrix} 1 & d-c & 0 \\ 0 & a-d & 1 \\ 0 & b-c & 1 \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c+d)(a+b-(c+d))(a+d-(b+c))(a+c-(b+d)).\end{aligned}$$

(iv) Notons $D_n = D_n(a)$ le déterminant cherché. En développant selon la première colonne, on trouve $D_n = aD_{n-1} + D_{n-2}$. La suite (D_n) est donc linéaire récurrente d'ordre 2 à coefficients constants, avec $D_1 = a$ et $D_2 = a^2 + 1$. Son équation caractéristique, qui est $r^2 - ar - 1 = 0$, a pour discriminant $\Delta = a^2 + 4$. Ce discriminant est nul si et seulement si $a = \pm 2i$, auquel cas l'équation caractéristique a pour unique racine i (lorsque $a = 2i$) ou $-i$ (lorsque $a = -2i$). Dans le premier cas,

$$D_n = (\alpha n + \beta) i^n, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

et les conditions initiales $D_1 = a = 2i$ et $D_2 = a^2 + 1 = -3$ donnent $\alpha = \beta = 1$, donc $D_n = (n+1)i^n$. Dans le deuxième cas,

$$D_n = (\alpha n + \beta)(-1)^n i^n, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

et les conditions initiales $D_1 = a = -2i$ et $D_2 = a^2 + 1 = -3$ donnent encore $\alpha = \beta = 1$, donc $D_n = (n+1)(-1)^n i^n$. Lorsque le discriminant est non nul, si c est une racine carrée de $\Delta = a^2 + 4$, les deux solutions de l'équation caractéristique sont $r_1 = (a+c)/2$ et $r_2 = (a-c)/2$, de sorte que

$$D_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Les conditions initiales $D_1 = a$ et $D_2 = a^2 + 1$ donnent

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{rcl} \alpha r_1 + \beta r_2 &=& a \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 &=& a^2 + 1 \end{array}\right. &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a^2 + 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \begin{pmatrix} r_2^2 & -r_2 \\ -r_1^2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^2 + 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{a r_2^2 - r_2(a^2+1)}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \text{ et } \beta = \frac{-a r_1^2 + r_1(a^2+1)}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}.\end{aligned}$$

Or $r_1 r_2 (r_2 - r_1) = c(c^2 - a^2)/4 = c$, $a r_2^2 - r_2(a^2+1) = (a+c)/2 = r_1$ et $-a r_1^2 + r_1(a^2+1) = -r_2$, donc

$$\alpha = \frac{r_1}{c} \text{ et } \beta = -\frac{r_2}{c}.$$

Il s'ensuit que dans le cas $a \notin \{\pm 2i\}$,

$$D_n = \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{c} = \frac{(a+c)^{n+1} - (a-c)^{n+1}}{2^{n+1} c}, \quad \text{avec } c^2 = a^2 + 4.$$

On peut, enfin, simplifier le numérateur, puisque

$$\begin{aligned}(a+c)^{n+1}-(a-c)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}c^k - \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}(-1)^k c^k \\ &= 2\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}c^k.\end{aligned}$$

De ceci on déduit, puisque $c^2 = \Delta = a^2+4$,

$$D_n = \frac{1}{2^n}\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}c^{k-1} = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{2p+1}a^{n-2p}(a^2+4)^p$$

où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière.

(v) On note $\Delta_{n,p}$ le déterminant recherché (de taille $p+1$). La formule de Pascal donne

$$\forall N \geq 1,\ \forall k \geq 1,\ \binom{N}{k} - \binom{N-1}{k} = \binom{N-1}{k-1}.$$

En faisant successivement $L_{p+1} \leftarrow L_{p+1} - L_p$, $L_p \leftarrow L_p - L_{p-1}, \ldots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, et en développant selon la première colonne, on obtient

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ 0 & \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-1}{0} & \cdots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix} = \Delta_{n-1,p-1}.$$

On déduit de ceci, par récurrence immédiate, que $\Delta_{n,p} = 1$.