Université d'Angers **P8-P9 2024-25**
L2 Math, DL Math-Eco & DL Math-Info **Diagonalisation - P8**
Luc Menichi & William Fremont

Fiche d'exercices 1 - Déterminants

Exercice 1 : Révisions d'algèbre linéaire - questions générales

Vrai ou faux ? Si l'affirmation est vraie, la démontrer, et sinon, donner un contre-exemple.

(i) Soient u et v deux vecteurs d'un espace vectoriel E. Alors $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u, u+v) = \mathrm{Vect}(u-v, u+v)$.

(ii) Si (u, v, w) est une famille libre dans un espace vectoriel E, alors la famille $(u, v+u, w+v+u)$ est libre.

(iii) Si u, v, w sont des vecteurs deux à deux non colinéaires dans un espace vectoriel E de dimension 3, alors ils engendrent E.

(iv) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux familles finies d'éléments de E, l'une libre et l'autre génératrice. Alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont le même nombre n d'éléments.

(v) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(vi) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(vii) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, de dimension finie. Si $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

(viii) Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ linéaire. Alors f est injective si et seulement si elle est surjective.

(ix) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Alors f est injective si et seulement si elle est surjective.

(x) Soient E et F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ linéaire, et $\mathcal{F}$ une famille finie d'éléments de E. Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $f(\mathcal{F})$ est libre.

(xi) Soient E et F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ linéaire, et $\mathcal{F}$ une famille finie d'éléments de E. Si $\mathcal{F}$ est liée, alors $f(\mathcal{F})$ est liée.

(xii) Soient E et F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ linéaire, et $\mathcal{F}$ une famille finie d'éléments de E. Si $f(\mathcal{F})$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est libre.

(xiii) Soient E et F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ linéaire, et $\mathcal{F}$ une famille finie d'éléments de E. Si $f(\mathcal{F})$ est liée, alors $\mathcal{F}$ est liée.

(xiv) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ deux familles de taille n d'éléments distincts. Alors il existe un endomorphisme de E envoyant u_i sur v_i, pour tout $1 \leq i \leq n$.

(xv) Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications linéaires, alors $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

(xvi) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors $\dim(E) = \mathrm{rg}(f) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Exercice 2 : Révisions d'algèbre linéaire - changement de base

Soit $n \geq 2$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient a un nombre réel non nul et $u_i = a^i e_i$, pour $1 \leq i \leq n$. Donner la matrice de f dans la base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Exercice 3 : Sommation sur les colonnes

Soit φ une forme $n-$linéaire alternée sur un espace vectoriel E. Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. On pose

$$y_i = \sum_{k \neq i} x_k = x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n.$$

(i) Calculer $\varphi(y_1, \dots, y_n)$ en fonction de $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ pour $n = 2$ et $n = 3$.

(ii) Calculer $\varphi(y_1, \dots, y_n)$ dans le cas général. [On pourra calculer la somme des y_i.]

Exercice 4 : Unicité du déterminant

Soient E un espace vectoriel de dimension n, φ une forme n-linéaire sur E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Dans tout l'exercice, on fixe une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs de E et on note, pour tout j, $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. On appelle enfin *permutation* de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ toute bijection σ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même. L'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ est noté S_n.

(i) Montrer que

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}} a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n} \varphi(e_{f(1)}, \dots, e_{f(n)})$$

où la somme porte sur l'ensemble des applications f de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même.

On suppose désormais que φ est alternée.

(ii) Que vaut $\varphi(e_{f(1)}, \dots, e_{f(n)})$ si f n'est pas injectif ?

(iii) En déduire que

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Soit maintenant $\sigma \star \varphi : E^n \to \mathbb{K}$ l'application définie par $(\sigma \star \varphi)(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

(iv) Montrer que pour toutes σ_1, $\sigma_2 \in S_n$,

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2) \star \varphi = \sigma_1 \star (\sigma_2 \star \varphi).$$

(On dit que le groupe des permutations S_n agit à gauche sur l'ensemble des formes n-linéaires)

On admettra que toute permutation σ s'écrit comme la composée de p transpositions $\tau_1 \circ \tau_2 \cdots \circ \tau_p$ et que la parité de p est indépendante de la décomposition choisie. On appellera *signature de* σ, noté $\varepsilon(\sigma)$, le signe $(-1)^p$.

(v) Montrer que $\sigma \star \varphi = \varepsilon(\sigma)\varphi$.

(vi) En déduire que

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \right) \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Nous avons donc démontré les deux résultats du cours suivants :

— Deux formes n-linéaires alternées non nulles sur un espace vectoriel de dimension n sont toujours proportionnelles.

— Il existe donc au plus une seule forme n-linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ tel que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$. Sa formule est donnée par

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

C'est le déterminant de la famille $x_1, \dots, x_n$ de n vecteurs de E dans la base $\mathcal{B}$.

(vii) Montrer que pour toute permutation σ, pour toutes formes n-linéaires φ_1, φ_2, et pour tous réels α_1, α_2, $\sigma \star (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(\sigma \star \varphi_1) + \alpha_2(\sigma \star \varphi_2)$. (On dit que l'action du groupe des permutations S_n sur les formes n-linéaires est linéaire).

(viii) Soit m une forme n-linéaire sur E. Posons

$$a(m) := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \sigma \star m.$$

Montrer que la forme n-linéaire $a(m)$, appelée anti-symétrisée de m, est alternée.

(ix) En choisissant judicieusement m, déduire l'existence d'une forme n-linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ tel que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Exercice 5 :

Montrer, sans calcul, que quels que soient les scalaires $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, la matrice

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \alpha^2 & 2a+\alpha \\ b & \beta & \beta^2 & 2b+\beta \\ c & \gamma & \gamma^2 & 2c+\gamma \\ d & \delta & \delta^2 & 2d+\delta \end{pmatrix}$$

n'est jamais inversible.

Exercice 6 : Calculs de déterminants

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \\ -1 & -1 & m \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

En déduire si les matrices

$$\begin{pmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont inversibles.

Exercice 7 : Bases et déterminants

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^4$?

(i) $\Big\{(1,-1,1,0),\ (1,0,1,-1),\ (1,1,1,1),\ (0,0,1,1)\Big\}$

(ii) $\Big\{(1,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,1)\Big\}$

Exercice 8 : Encore des calculs de déterminant

Calculer les déterminants suivants, où $n \geq 2$, $p \geq 0$ et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

(i) $\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}$

(v) $\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}$