Université d'Angers **2025-26**
L2 Math-DL ME-DL MI **Module : Diagonalisation P9**

Seconde Chance : Vendredi 19 Juin 2026, 14h-16h30. Tiers-Temps 14h-17h20

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...).
Le nombre total de points est 20.

Exercice 1 : Vrai ou faux ? Total de la partie 1 : 4 pts

Si l'affirmation est vraie, la démontrer, et sinon, donner un contre-exemple. Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille génératrice de n vecteurs de E.

(a) (2 points) Si l'application f est surjective alors la famille $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$ est une famille génératrice de F ?

Solution: Oui. Preuve : Soit $y \in F$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ engendre E, il existe α_1, α_2, ..., $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$. Donc par linéarité, $y = f(x) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \cdots + \alpha_n f(u_n)$. Donc $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$ engendre F.

(b) (2 points) Si la famille $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$ est une famille génératrice de F alors l'application f est surjective ?

Solution: Oui. Preuve : Soit $y \in F$. Comme $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$ est une famille génératrice de F, il existe α_1, α_2, ..., $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \cdots + \alpha_n f(u_n)$. Donc par linéarité, $y = f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n)$. Donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc f est surjectif.

Exercice 2 : Diagonalisation Total de la partie 2 : 10 pts

(a) (3 points) Diagonaliser sur $\mathbb{C}$ la matrice A donnée par $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution: Soit f l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique $\beta = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{C}^2$.

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -5 \\ 1 & X-4 \end{vmatrix} = (X-2)(X-4) - (1)(-5)$$

$$= X^2 - 2X - 4X + 8 + 5 = X^2 - 6X + 13.$$

$\Delta = 36 - 4 \times 13 = -16 = (4i)^2$ $X = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$. Donc les valeurs propres sont $3 + 2i$ et $3 - 2i$ Cherchons $\ker(f - (3+2i)id_{\mathbb{R}^2})$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(f - (3+2i)id_{\mathbb{R}^2}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 5y & = & (3+2i)x \\ -x & + & 4y & = & (3+2i)y \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcccl} (-1-2i)x & + & 5y & = & 0 \\ -x & + & (1-2i)y & = & 0 \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow -x + (1-2i)y = 0 \Leftrightarrow x = (1-2i)y$. Car la première ligne est $(1+2i)$ fois la 2 ème.
Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors v_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre $3+2i$. $Av_1 = (1+2i)v_1$. En conjuguant, $A\overline{v_1} = (1+2i)\overline{v_1}$.
Donc $\overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $3-2i$.
Alors $\overline{v_1}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $3-2i$. $\beta' = (v_1, \overline{v_1})$ est une famille libre donc une base de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de f.

(b) (4 points) Donner l'ensemble des suites réelles u_n et v_n vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & 2u_n & + & 5v_n \\ v_{n+1} & = & -u_n & + & 4v_n \end{array} \right. .$$

Solution: Considérons la suite de vecteurs $X_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ défini par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Les suites u_n et v_n vérifient (S) si et seulement pour tout tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Par récurrence immédiate

$$X_n = A^n X_0.$$

Calculons la puissance n-ième de la matrice, A^n, pour tout $n \geq 0$.
Soit P la matrice de passage de β à β'. Alors $P = \begin{pmatrix} 1-2i & 1+2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} -1 & 1+2i \\ 1 & -1+2i \end{pmatrix}$.
On a $f(\vec{v_1}) = (3+2i)\vec{v_1}$ et $f(\overline{v_1}) = (3-2i)\overline{v_1}$. Donc la matrice de f dans la base β' est

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3+2i & 0 \\ 0 & 3-2i \end{pmatrix}.$$

Donc comme A^n est la matrice de f^n dans la base canonique β et D^n la matrice de f^n dans la base canonique β', ou parce que $P^{-1}A^nP = (P^{-1}A^{n-1}P)(P^{-1}AP) = \cdots = (P^{-1}AP)^n$, on a

$$D^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} (3+2i)^n & 0 \\ 0 & (3-2i)^n \end{pmatrix}.$$

Donc $A^n = (PD^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} (1-2i)(3+2i)^n & (1+2i)(3-2i)^n \\ (3+2i)^n & (3-2i)^n \end{pmatrix} P^{-1}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} -(1-2i)(3+2i)^n + (1+2i)(3-2i)^n & 5(3+2i)^n - 5(3-2i)^n \\ -(3+2i)^n + (3-2i)^n & (1+2i)(3+2i)^n + (-1+2i)(3-2i)^n \end{pmatrix}.$$

On vérifie pour $n = 0$ et $n = 1$ que notre formule donne bien I_2 et A.
Donc

$$\begin{cases} 4iu_n & = [(2i-1)(3+2i)^n + (1+2i)(3-2i)^n]\, u_0 \quad + [5(3+2i)^n - 5(3-2i)^n]\, v_0 \\ 4iv_n & = [-(3+2i)^n + (3-2i)^n]\, u_0 \quad + [(1+2i)(3+2i)^n + (2i-1)(3-2i)^n]\, v_0 \end{cases}$$

(c) (1 point) Montrer qu'il existe des matrices non inversibles de la forme $aI_2 + bA$ où a et b sont des complexes non nuls.

Solution: Comme $3+2i$ est une valeur propre, $\det(A-(3+2i)I_2) = \chi_A(3+2i) = 0$. Donc $A - (3+2i)I_2$ n'est pas une matrice inversible.

(d) (2 points) Montrer que l'ensemble des matrices de la forme $aI_2 + bA$ où a et b sont des réels non nuls, sont des matrices inversibles.

Solution: Première méthode vue en cours : Comme $\chi_A(X) = X^2 - 6X + 13$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$, $\chi_A(X)$ est premier avec tous les polynômes réels de la forme $a + bX$. D'après Bezout, il existe deux polynômes réels $U(X)$ et $V(X)$ tel que $(a + bX)U(X) + \chi_A(X)V(X) = 1$. En évaluant cet égalité polynomiale en A, nous obtenons que $(aI_2+bA)U(A)+\chi_A(A)V(A) = I_2$. D'après Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$. Donc $(aI_2 + bA)U(A) = I_2$. Donc $aI_2 + bA$ est inversible d'inverse $U(A)$.
Seconde méthode :

$$\det(aI_2 + bA) = \begin{vmatrix} a+2b & 5b \\ -b & a+4b \end{vmatrix} = (a+2b)(a+4b) - (5b)(-b)$$

$$= a^2 + 2ba + 6ab + 8b^2 + 5b^2 = a^2 + 8ab + 13b^2 = b^2\chi_A(-a/b) \neq 0.$$

Car $\chi_A(X)$ est un polynôme sans solutions réels.

Exercice 3 : Applications linéaires entre polynômes Total de la partie 3 : 6 pts

On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes réels de degré ≤ 2, est un espace vectoriel de dimension 3. On considère l'application linéaire $h : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $h(P) = (X-1)P' - X^2P"$ pour tout polynôme P de degré ≤ 2. Ici P' désigne le polynôme dérivée de P et $P"$ désigne le polynôme dérivée seconde de P.

(a) (1 point) Déterminer $A = M_{\beta,\beta}(h)$, la matrice de h relativement à $\beta = (1, X, X^2)$, la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

> **Solution:** $h(1) = 0$, $h(X) = -1+X$, $h(X^2) = (X-1)2X - X^2 2 = -2X$. Donc $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) (2 points) Donner des bases pour $\ker h$, le noyau de h, et pour Im h, l'image de h.

> **Solution:** La matrice A comporte deux colonnes indépendantes seulement. Donc son rang rg h est 2. Donc d'après la formule du rang, $\ker h$ est de dimension 1. Le polynôme constant 1 appartient au noyau, c'est donc une base de $\ker h$. $h(X) = X - 1$ et $h(X^2) = -2X$ par définition appartiennent à l'image de h. Comme ces deux vecteurs sont libres. Ils forment une base de Im h.

(c) (1 point) Trouver des bases de $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, telles que $B = M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(h)$, la matrice de h relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

> **Solution:** Prenons $\mathcal{C} = (X, X^2, 1)$ et $\mathcal{C}' = (X-1, -2X, X^2)$. Alors comme $h(X) = X - 1$, $h(X^2) = -2X$ et $h(1) = 0$, la matrice de h relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De manière générale, toute application entre deux espaces vectoriels de dimension 3 de rang 2 admet une telle matrice.

(d) (1 point) L'application linéaire h est-elle diagonalisable ?

> **Solution:** $\chi_h(X) = \det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ 0 & X-1 & 2 \\ 0 & 0 & X \end{vmatrix} = X^2(X-1)$. Donc 0 est une valeur propre de multiplicité 2. Or $\ker h$, le sous espace propre associé à la valeur propre 0, est de dimension 1 seulement. Donc h n'est pas diagonalisable.

(e) (1 point) Donner la formule matricielle reliant A et B en précisant les matrices de passage.

Solution: Soit P la matrice de passage de la base β à la base $\mathcal{C}$. Explicitement $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit Q la matrice de passage de la base β à la base $\mathcal{C}'$. Explicitement $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit X le vecteur coordonnées d'un polynôme P dans la base β. Soit Y le vecteur coordonnées du polynôme $h(P)$ dans la base β. Alors $Y = AX$. Soit X' le vecteur coordonnées du polynôme P dans la base $\mathcal{C}$. Soit Y le vecteur coordonnées du polynôme $h(P)$ dans la base $\mathcal{C}'$. Alors $Y' = BX'$. $X = PX'$. $Y = QY'$. Donc $Y' = Q^{-1}Y == Q^{-1}AX = Q^{-1}APX'$. Donc finalement

$$B = Q^{-1}AP.$$