

Seconde Chance : Vendredi 19 Juin 2026, 14h-16h30. Tiers-Temps 14h-17h20

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...).
Le nombre total de points est 20.

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

Total de la partie 1 : 4 pts

Si l'affirmation est vraie, la démontrer, et sinon, donner un contre-exemple. Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soient (u_1, u_2, \dots, u_n) une famille génératrice de n vecteurs de E .

- (a) (2 points) Si l'application f est surjective alors la famille $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$ est une famille génératrice de F ?
- (b) (2 points) Si la famille $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$ est une famille génératrice de F alors l'application f est surjective ?

Exercice 2 : Diagonalisation

Total de la partie 2 : 10 pts

- (a) (3 points) Diagonaliser sur \mathbb{C} la matrice A donnée par $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
- (b) (4 points) Donner l'ensemble des suites réelles u_n et v_n vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(S) \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + 5v_n \\ v_{n+1} &= -u_n + 4v_n \end{cases} .$$

- (c) (1 point) Montrer qu'il existe des matrices non inversibles de la forme $aI_2 + bA$ où a et b sont des complexes non nuls.
- (d) (2 points) Montrer que l'ensemble des matrices de la forme $aI_2 + bA$ où a et b sont des réels non nuls, sont des matrices inversibles.

Exercice 3 : Applications linéaires entre polynômes

Total de la partie 3 : 6 pts

On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes réels de degré ≤ 2 , est un espace vectoriel de dimension 3. On considère l'application linéaire $h : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $h(P) = (X - 1)P' - X^2P''$ pour tout polynôme P de degré ≤ 2 . Ici P' désigne le polynôme dérivée de P et P'' désigne le polynôme dérivée seconde de P .

- (a) (1 point) Déterminer $A = M_{\beta, \beta}(h)$, la matrice de h relativement à $\beta = (1, X, X^2)$, la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- (b) (2 points) Donner des bases pour $\ker h$, le noyau de h , et pour $\text{Im } h$, l'image de h .
- (c) (1 point) Trouver des bases de $\mathbb{R}_2[X]$, \mathcal{C} et \mathcal{C}' , telles que $B = M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(h)$, la matrice

de h relativement aux bases \mathcal{C} et \mathcal{C}' soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (d) (1 point) L'application linéaire h est-elle diagonalisable ?
- (e) (1 point) Donner la formule matricielle reliant A et B en précisant les matrices de passage.