Université d'Angers **2024-25**
L2 Math-DL ME-DL MI **Module : Diagonalisation P9**

Seconde Chance : Vendredi 20 Juin 2025, 14h-16h30. Tiers-Temps 14h-17h20

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...).
Le nombre total de points est 20.

Exercice 1 : Projection, symétrie Total de la partie 1 : 6 pts

Soit

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Soit f l'endomorphisme associé à M relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(a) (2 points) L'application f est-elle une projection ? une symétrie ?

(b) (2 points) Déterminer les éléments caractéristiques de f. On donnera pour chacun de ces ensembles un système d'équations cartésiennes et une base. On les note I et J.

(c) (1 point) Vérifier que ces deux espaces I et J sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$: c'est à dire $I \oplus J = \mathbb{R}^4$.

(d) (1 point) Donner la matrice B de f dans une base constituée de vecteurs d'une base de I et de vecteurs d'une base de J.

Indication : On pourra faire les questions dans le désordre et chercher les sous-espaces propres de f .

Solution: Si f est une projection ou une symétrie, les valeurs propres sont 0, 1 et -1. Cherchons $\ker f$, $\ker(f - id_{\mathbb{R}^4})$ et $\ker(f + id_{\mathbb{R}^4})$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \quad (L1) \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 0 \quad (L2) \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \quad (L3) \\ x & + & y & - & z & - & t & = & 0 \quad (L4) \end{array} \right.$$

$(L1) + (L2) + (L3) + (L4)$ donne $4x = 0$. $(L1) + (L2)$ donne $2x + 2t = 0$. $(L2) + (L3)$ donne $2x - 2y = 0$. Donc $x = y = z = t = 0$. Donc $\ker f = \{0\}$. Donc f n'est pas une projection.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(f - id_{\mathbb{R}^4}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 2x \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 2y \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 2z \\ x & + & y & - & z & - & t & = & 2t \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} -x & + & y & + & z & + & t & = 0 & (L1 \\ x & - & 3y & - & z & + & t & = 0 & (L2) \\ x & - & y & - & z & - & t & = 0 & (L3) \\ x & + & y & - & z & - & 3t & = 0 & (L4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & - & y & - & z & - & t & = 0 & (L3) \\ & - & 2y & & & + & 2t & = 0 & (L2)-(L3) \\ & & 4y & & & - & 4t & = 0 & (L4)-(L3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z + 2t \\ y & = & t \end{array}\right.$$

$z=1$ et $t=0$ donne $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$. $z=0$ et $t=1$ donne $v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \ker(f - id_{\mathbb{R}^4})$ Alors

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z+2t\\t\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\0\\z\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2t\\t\\0\\t\end{pmatrix} = zv_1 + tv_2.$$

Donc la famille v_1, v_2 est une famille génératrice de $\ker(f - id_{\mathbb{R}^4})$. Clairement cette famille est libre. Donc
la famille v_1, v_2 est une base de $\ker(f - 2id_{\mathbb{R}^4})$. Donc $\ker(f - id_{\mathbb{R}^4})$ est de dimension 2.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \ker(f + id_{\mathbb{R}^4}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} x & + & y & + & z & + & t & = & -2x \\ x & - & y & - & z & + & t & = & -2y \\ x & - & y & + & z & - & t & = & -2z \\ x & + & y & - & z & - & t & = & -2t \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} 3x & + & y & + & z & + & t & = 0 & (L1) \\ x & + & y & - & z & + & t & = 0 & (L2) \\ x & - & y & + & 3z & - & t & = 0 & (L3) \\ x & + & y & - & z & + & t & = 0 & (L4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & + & y & - & z & + & t & = 0 & (L2) \\ & - & 2y & + & 4z & - & 2t & = 0 & (L1)-3(L2) \\ & - & 2y & + & 4z & - & 2t & = 0 & (L3)-(L2) \end{array}\right.$$

En divisant par -2, l'equation en double,

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} x & & & + & z & & = 0 & (L2-L') \\ & & y & - & 2z & + t & = 0 & (L') \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & 2z - t \end{array}\right.$$

$z=1$ et $t=0$ donne $v_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$. $z=0$ et $t=1$ donne $v_4 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(f + id_{\mathbb{R}^4})$ Alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 2z - t \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 2z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = zv_1 + tv_2.$$

Donc la famille v_3, v_4 est une famille génératrice de $\ker(f + id_{\mathbb{R}^4})$. Clairement cette famille est libre. Donc

la famille v_3, v_4 est une base de $\ker(f+id_{\mathbb{R}^4})$. Donc $\ker(f+id_{\mathbb{R}^4})$ est de dimension 2. Les sous-espaces propres $\ker(f - id_{\mathbb{R}^4})$ et $\ker(f + id_{\mathbb{R}^4})$ sont en somme directe. Donc

$$\dim\left(\ker(f - id_{\mathbb{R}^4}) \oplus \ker(f + id_{\mathbb{R}^4})\right) = \dim \ker(f-id_{\mathbb{R}^4}) + \dim \ker(f+id_{\mathbb{R}^4}) = 2+2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$$

Donc

$$\ker(f - id_{\mathbb{R}^4}) \oplus \ker(f + id_{\mathbb{R}^4}) = \mathbb{R}^4$$

Posons $I = \ker(f - id_{\mathbb{R}^4})$ et $J = \ker(f + id_{\mathbb{R}^4})$. f est la symétrie par rapport à I de direction J. La matrice de f dans la base v_1, v_2, v_3 et v_4 est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Diagonalisation Total de la partie 2 : 7 pts

(a) (5 points) Donner l'ensemble des suites u_n et v_n vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(S) \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

Indication : Pour diagonaliser la matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

on pourra remarquer que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une vecteur propre.

Solution: Considérons la suite de vecteurs $X_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ défini par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Les suites u_n et v_n vérifient (S) si et seulement pour tout tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Par récurrence immédiate

$$X_n = A^n X_0.$$

Calculons la puissance n-ième de la matrice, A^n, pour tout $n \geq 0$. La matrice A est une partie d'une matrice plus compliquée diagonalisée en cours. On fait la même méthode.

Soit f l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $f(v_1) = C1 + C2 = 5v_1$. Donc v_1 est un vecteur propre et 5 est valeur propre

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -4 \\ -2 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X-3) - (-2)(-4)$$

$$= X^2 - X - 3X + 3 - 8 = X^2 - 4X - 5 = (X+1)(X-5).$$

Cherchons $\ker(f + id_{\mathbb{R}^2})$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(f + id_{\mathbb{R}^2}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & - & 3y & = & -x \\ -x & + & 5y & = & -y \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow 2x + 4y = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 0$

Soient $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. $f(v_2) = C1 - C2 = 2v_1$. Donc v_2 est un vecteur propre. $\beta' = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de f.

Soit P la matrice de passage de β à β'. Alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a $f(\vec{v_1}) = 5\vec{v_1}$ et $f(\vec{v_2}) = -\vec{v_1}$. Donc la matrice de f dans la base β' est

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc comme A^n est la matrice de f^n dans la base canonique β et D^n la matrice de f^n dans la base canonique β', ou parce que $P^{-1}A^nP = (P^{-1}A^{n-1}P)(P^{-1}AP) = \cdots = (P^{-1}AP)^n$, on a

$$D^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Donc $A^n = (PD^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} 5^n & 2(-1)^n \\ 5^n & -(-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 2\times 5^n - 2(-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 2\times 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}$. On vérifie pour $n = 0$ et $n = 1$ que notre formule donne bien I_2 et A.
Donc

$$\left\{ \begin{array}{lllll} 3u_n & = & (5^n + 2(-1)^n)u_0 & + & (2\times 5^n - 2(-1)^n)v_0 \\ 3v_n & = & (5^n - (-1)^n)u_0 & + & (2\times 5^n + (-1)^n)v_0 \end{array} \right.$$

(b) (2 points) Donner l'ensemble des suites u_n et v_n vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(S) \left\{ \begin{array}{lllll} u_{n+1} & = & -u_n & + & 4v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n & + & v_n \end{array} \right.$$

Indication : pour calculer B^n, la puissance n-ième de la matrice, $B \in M_2(\mathbb{R})$ donnée par

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

on pourra remarquer que $B = A - 2I_2$.

Solution: Première méthode : Soit g l'endomorphisme associé à B relativement à la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$. Alors $g = f - 2id_{\mathbb{R}^3}$. Soit v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Alors $f(v) = \lambda v$. Donc $g(v) = f(v) - 2v = \lambda v - 2v = (\lambda - 2)v$. Donc v est un vecteur propre de g associé à la valeur propre $\lambda - 2$. Soit (v_1, v_2) la base de vecteurs propres de f trouvée à la question précédente associés respectivement aux valeurs propres 5 et 1. Alors (v_1, v_2) est une base de vecteurs propres de g associés respectivement aux valeurs propres 3 et -3.
Donc dans les calculs du (a), en remplaçant 5^n par 3^n et $(-1)^n$ par $(-3)^n$ on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{lllll} 3u_n & = & (3^n + 2(-3)^n)u_0 & + & (2\times 3^n - 2(-3)^n)v_0 \\ 3v_n & = & (3^n - (-3)^n)u_0 & + & (3^n + (-3)^n)v_0 \end{array} \right.$$

Seconde méthode : D'après le binôme de Newton

$$B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \left[(-2)I_2\right]^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} A^k.$$

Comme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} \lambda^k = (\lambda - 2)^n$ et d'après la formule pour A^k donné par (a),

$$B^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (5-2)^n + 2(-1-2)^n & 2\times(5-2)^n - 2(-1-2)^n \\ (5-2)^n - (-1-2)(-3)^n & 2\times(5-2)^n + (-1-2)^n \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3^n + 2(-3)^n & 2\times 3^n - 2(-3)^n \\ 3^n - (-3)^n & 2\times 3^n + (-3)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : Somme directe et suites récurrentes Total de la partie 3 : 7 pts

Soit A et $B \in M_k(\mathbb{R})$ deux matrices carrées de taille k à coefficients réels tels que $AB = BA$ et tels que $A - B$ soit une matrice inversible.

On considère les deux relations de récurrence simple, $X_{n+1} = AX_n$ et $X_{n+1} = BX_n$.

Soit H l'ensemble des suites $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^k$ vérifiant $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit G l'ensemble des suites $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^k$ vérifiant $X_{n+1} = BX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère la relation de récurrence double

$$X_{n+2} = (A + B)X_{n+1} - ABX_n.$$

Soit F l'ensemble des suites $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^k$ vérifiant $X_{n+2} = (A + B)X_{n+1} - ABX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) (1 point) Dans le cas où $k = 1$, donner F, G et H : c'est à dire donner les suites réelles x_n vérifiant $x_{n+1} = Ax_n$, $x_{n+1} = Bx_n$ et $x_{n+2} = (A+B)x_{n+1} - ABx_n$ lorsque A et B sont deux réels distincts.

Solution: H est l'ensemble des suites réelles de la forme $x_n = CA^n$ où C constante réelle. G est l'ensemble des suites réelles de la forme $x_n = DB^n$ où D constante réelle. La relation de récurrence double $x_{n+2} = (A + B)x_{n+1} - ABx_n$ à pour polynôme caractéristique $\lambda^2 - (A + B)\lambda + AB = (\lambda - A)(\lambda - B)$ qui a deux racines distinctes A et B car par hypothèse $A - B \neq 0$. D'après le cours, F, l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des suites réelles de la forme $x(t) = CA^n + DB^n$ où C et D sont deux constantes réelles.

(b) (1 point) Montrer que F est un espace vectoriel.

Solution: Montrons que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de vecteurs de $\mathbb{R}^k$. La suite nulle vérifie l'équation donc appartient à F. Soient $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors $X_{n+2} = (A + B)X_{n+1} - ABX_n$ et $Y_{n+2} = (A + B)Y_{n+1} - ABY_n$. Donc

$$(\alpha X + \beta Y)_{n+2} = \alpha X_{n+2} + \beta Y_{n+2} = (A + B)\alpha X_{n+1} - AB\alpha X_n +$$

$$(A + B)\beta Y_{n+1} - AB\beta Y_n = (A + B)(\alpha X + \beta Y)_{n+1} - AB(\alpha X + \beta Y)_n.$$

Donc $(\alpha X + \beta Y) \in F$.

(c) (1 point) Montrer que H et G sont des parties de F.

Solution: Soit $X \in H$. Alors $X_{n+1} = AX_n$. Donc $X_{n+2} = AX_{n+1} = A(AX_n) = A^2X_n$. Donc $X_{n+2} - (A+B)X_{n+1} + ABX_n = A^2X_n - (A+B)AX_n + ABX_n = (AB - BA)X_n = 0$. Donc $X \in F$. Par symétrie entre A et B, si $X \in G$ alors $X \in F$.

(d) (1 point) Montrer que H et G sont des sous-espaces vectoriels de F.

Solution: Soient X et $Y \in H$. Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors $X_{n+1} = AX_n$ et $Y_{n+1} = AY_n$. Donc

$$(\alpha X + \beta Y)_{n+1} = \alpha X_{n+1} + \beta Y_{n+1} = \alpha AX_n + \beta AY_n = A(\alpha X + \beta Y)_n.$$

Donc $\alpha X + \beta Y \in H$. Donc comme H est une partie de F, H est un sous-espace vectoriel de F. De même, G est un sous-espace vectoriel de F.

(e) (1 point) Montrer que $H \cap G = \{0\}$.

Solution: Soit $X \in H \cap G$. Alors $X_{n+1} = AX_n = BX_n$. Donc $(A - B)X_n = 0$. Donc $X_n = (A - B)^{-1}(A - B)X_n = (A - B)^{-1}(0) = 0$.

(f) (1 point) Montrer que $H \oplus G = F$. Indication : on pourra écrire que

$$X_n = (A - B)^{-1} (AX_n - X_{n+1} + X_{n+1} - BX_n).$$

Solution: On a bien

$$X_n = (A - B)^{-1} (AX_n - X_{n+1}) + (B - A)^{-1} (BX_n - X_{n+1}).$$

Soit $Y_n = (A - B)^{-1} (AX_n - X_{n+1})$. Alors pour $X \in F$,

$$Y_{n+1} = (A-B)^{-1} (AX_{n+1} - X_{n+2}) = (A-B)^{-1} (AX_{n+1} - (A + B)X_{n+1} + ABX_n) =$$

$$(A - B)^{-1} (-BX_{n+1} + BAX_n) = (A - B)^{-1}B (-X_{n+1} + AX_n)$$
$$= B(A - B)^{-1} (AX_n - X_{n+1}) = BY_n.$$

Donc $Y \in G$. Par symétrie $Z_n = (B - A)^{-1} (BX_n - X_{n+1}) \in F$

(g) (1 point) Supposons que A et B sont les deux matrices de l'exercice précédent. Déduire l'ensemble F.

Solution: D'après le (a) de l'exercice précédent, les deux suites de vecteurs $\begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n \\ 5^n - (-1)^n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \times 5^n - 2(-1)^n \\ 2 \times 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}$ forment une base de H.

D'après le (b) de l'exercice précédent, les deux suites de vecteurs $\begin{pmatrix} 3^n + 2(-3)^n \\ 3^n - (-3)^n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2(-3)^n \\ 2 \times 3^n + (-3)^n \end{pmatrix}$ forment une base de G. Comme $H \oplus G = F$, la réunion d'une base de F et d'une base de H est une base de F. Donc F est l'ensemble des

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} 3u_n & = & (5^n + 2(-1)^n)C_1 & + & (2 \times 5^n - 2(-1)^n)C_2 \\ & + & (3^n + 2(-3)^n)D_1 & + & (2 \times 3^n - 2(-3)^n)D_2 \\ 3v_n & = & (5^n - (-1)^n)C_1 & + & (5^n + (-1)^n)C_2 \\ & + & (3^n - (-3)^n)D_1 & + & (3^n + (-3)^n)D_2 \end{array} \right.$$

où C_1, C_2, D_1 et D_2 sont des constantes réelles.