Université d'Angers **2024-25**

L2 Math-DL ME-DL MI **Module : Diagonalisation P9**

Seconde Chance : Vendredi 20 Juin 2025, 14h-16h30. Tiers-Temps 14h-17h20

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...).
Le nombre total de points est 20.

Exercice 1 : Projection, symétrie Total de la partie 1 : 6 pts

Soit

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Soit f l'endomorphisme associé à M relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(a) (2 points) L'application f est-elle une projection ? une symétrie ?

(b) (2 points) Déterminer les éléments caractéristiques de f. On donnera pour chacun de ces ensembles un système d'équations cartésiennes et une base. On les note I et J.

(c) (1 point) Vérifier que ces deux espaces I et J sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$: c'est à dire $I \oplus J = \mathbb{R}^4$.

(d) (1 point) Donner la matrice B de f dans une base constituée de vecteurs d'une base de I et de vecteurs d'une base de J.

Indication : On pourra faire les questions dans le désordre et chercher les sous-espaces propres de f .

Exercice 2 : Diagonalisation Total de la partie 2 : 7 pts

(a) (5 points) Donner l'ensemble des suites u_n et v_n vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & u_n & + & 4v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n & + & 3v_n \end{array} \right.$$

Indication : Pour diagonaliser la matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

on pourra remarquer que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une vecteur propre.

(b) (2 points) Donner l'ensemble des suites u_n et v_n vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccc} u_{n+1} & = & -u_n & + & 4v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n & + & v_n \end{array} \right.$$

Indication : pour calculer B^n, la puissance n-ième de la matrice, $B \in M_2(\mathbb{R})$ donnée par

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

on pourra remarquer que $B = A - 2I_2$.

Exercice 3 : Somme directe et suites récurrentes Total de la partie 3 : 7 pts

Soit A et $B \in M_k(\mathbb{R})$ deux matrices carrées de taille k à coefficients réels tels que $AB = BA$ et tels que $A - B$ soit une matrice inversible.

On considère les deux relations de récurrence simple, $X_{n+1} = AX_n$ et $X_{n+1} = BX_n$.

Soit H l'ensemble des suites $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^k$ vérifiant $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit G l'ensemble des suites $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^k$ vérifiant $X_{n+1} = BX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère la relation de récurrence double

$$X_{n+2} = (A + B)X_{n+1} - ABX_n.$$

Soit F l'ensemble des suites $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^k$ vérifiant $X_{n+2} = (A + B)X_{n+1} - ABX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) (1 point) Dans le cas où $k = 1$, donner F, G et H : c'est à dire donner les suites réelles x_n vérifiant $x_{n+1} = Ax_n$, $x_{n+1} = Bx_n$ et $x_{n+2} = (A+B)x_{n+1} - ABx_n$ lorsque A et B sont deux réels distincts.

(b) (1 point) Montrer que F est un espace vectoriel.

(c) (1 point) Montrer que H et G sont des parties de F.

(d) (1 point) Montrer que H et G sont des sous-espaces vectoriels de F.

(e) (1 point) Montrer que $H \cap G = \{0\}$.

(f) (1 point) Montrer que $H \oplus G = F$. Indication : on pourra écrire que

$$X_n = (A - B)^{-1} (AX_n - X_{n+1} + X_{n+1} - BX_n).$$

(g) (1 point) Supposons que A et B sont les deux matrices de l'exercice précédent. Déduire l'ensemble F.