

Contrôle continu : Mercredi 11 Février 2026, 9h-10h30.

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...).
Les exercices sont indépendants. Le nombre total de points est 21.

Exercice 1 : Diagonalisation

Total de la partie 1 : 12 pts

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ définie pour tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$

$$\text{par } f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y + z + 3t \\ x + y + 3z + t \\ x + 3y + z + t \\ 3x + y + z + t \end{pmatrix}.$$

(a) (1 point) Donner A , la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Solution: La matrice de f dans la base canonique β de $\mathbb{R}^4$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans le cours, nous avons considéré une matrice très similaire. La même méthode que dans le cours va marcher.

(b) (1 point) Calculer le déterminant de f .

Solution:

$$\det A = \begin{vmatrix} C1 & C2 & C3 & C4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C1 + C2 + C3 + C4 & C2 & C3 & C4 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \end{matrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2 - L1 \\ L3 - L1 \\ L4 - L1 \end{matrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, puis la dernière ligne

$$\det A = 6 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6(-2) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -12(-4) = 48.$$

- (c) (4 points) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f .

Solution:

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= \begin{vmatrix} C1 & C2 & C3 & C4 \\ X-1 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & X-1 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & X-1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C1+C2+C3+C4 & C2 & C3 & C4 \\ X-6 & -1 & -1 & -3 \\ X-6 & X-1 & -3 & -1 \\ X-6 & -3 & X-1 & -1 \\ X-6 & -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-6) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & X-1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \end{matrix} = (X-6) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & X & -2 & 2 \\ 0 & -2 & X & 2 \\ 0 & 0 & 0 & X+2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2-L1 \\ L3-L1 \\ L4-L1 \end{matrix} \end{aligned}$$

En développant par rapport à la première colonne, puis la dernière ligne

$$\chi_f(X) = (X-6) \begin{vmatrix} X & -2 & 2 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & 0 & X+2 \end{vmatrix} = (X-6)(X+2) \begin{vmatrix} X & -2 \\ -2 & X \end{vmatrix} = (X-6)(X+2)(X^2-4).$$

$\chi_f(X) = (X-6)(X+2)^2(X-2)$. Les valeurs propres de f sont 6 de multiplicité 1, 2 de multiplicité 1 et -2 de multiplicité 2.

- (d) (6 points) Démontrer que f est diagonalisable.

Solution: Cherchons $\ker(f + 2id_{\mathbb{R}^4})$, le sous-espace propre associé à la valeur propre -2 .

Donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(f + 2id_{\mathbb{R}^4}) &\Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 1y + 1z + 3t = -2x \\ 1x + 1y + 3z + 1t = -2y \\ 1x + 3y + 1z + 1t = -2z \\ 3x + 1y + 1z + 1t = -2t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1y + 1z + 3t = 0 & (L1) \\ 1x + 3y + 3z + 1t = 0 & (L2) \\ 1x + 3y + 3z + 1t = 0 & (L3) \\ 3x + 1y + 1z + 3t = 0 & (L4) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1y + 1z + 3t = 0 & (L1) \\ -8x & - 8t = 0 & (L2) - 3(L1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ x + t = 0 \end{cases}$$

Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors v_1 et $v_2 \in \ker(f + 2id_{\mathbb{R}^4})$.

Soient y et $x \in \mathbb{R}$ tel que $yv_1 + xv_2 = 0$. Alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \\ x \end{pmatrix}$ est le vecteur nul.

Donc $x = 0$ et $y = 0$. On a donc montré que la famille v_1, v_2 est libre. Donc $\ker(f + 2id_{\mathbb{R}^4})$ est de dimension ≥ 2 . Comme la dimension d'un sous-espace propre est toujours inférieur ou égal à la multiplicité, $\ker(f + 2id_{\mathbb{R}^4})$ est de dimension ≤ 2 . Donc $\ker(f + 2id_{\mathbb{R}^4})$ est de dimension 2.

Comme 2 et 6 sont de multiplicité 1, $\ker(f - 2id_{\mathbb{R}^4})$ et $\ker(f - 6id_{\mathbb{R}^4})$ sont de dimension 1.

Le polynôme caractéristique de f est donc scindé et pour toute valeur propre, la dimension du sous espace propre est égale à la multiplicité. Donc f est diagonalisable.

Il est inutile pour savoir si f est diagonalisable de trouver une base de chacun des sous-espaces propres. Mais faisons le :

La famille v_1, v_2 est une famille libre à deux éléments dans l'espace vectoriel $\ker(f + 2id_{\mathbb{R}^4})$ de dimension 2. Donc est une base de $\ker(f + 2id_{\mathbb{R}^4})$.

Cherchons $\ker(f - 2id_{\mathbb{R}^4})$, le sous-espace propre associé à la valeur propre 2.

Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(f - 2id_{\mathbb{R}^4}) \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 1y + 1z + 3t = 2x \\ 1x + 1y + 3z + 1t = 2y \\ 1x + 3y + 1z + 1t = 2z \\ 3x + 1y + 1z + 1t = 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1x + 1y + 1z + 3t = 0 & (L1) \\ 1x - 1y + 3z + 1t = 0 & (L2) \\ 1x + 3y - 1z + 1t = 0 & (L3) \\ 3x + 1y + 1z - 1t = 0 & (L4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1x + 1y + 1z + 3t = 0 & (L1) \\ & 4z + 4t = 0 & (L2) + (L1) \\ 1x + 3y - 1z + 1t = 0 & (L3) \\ 4x + 4y & = 0 & (L4) + (L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1x + 1y + 1z + 3t = 0 & (L1) \\ & 4z + 4t = 0 & (L2) + (L1) \\ & 4y + 4t = 0 & (L3) + (L1) \\ 4x + 4y & = 0 & (L4) + (L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t - t - t + 3t = 0 \\ z = -t \\ y = -t \\ x = -y = t \end{cases}$$

Soit $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $v_3 \in \ker(f - 2id_{\mathbb{R}^4})$. Comme le sous-espace vectoriel $\ker(f - 2id_{\mathbb{R}^4})$ est de dimension 1, il admet donc pour base, v_3 .

Soit $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $f(v_4) = C1 + C2 + C3 + C4 = 6v_4$. Donc v_4 est un vecteur propre. Comme $\ker(f - 6id_{\mathbb{R}^4})$ est de dimension 1, il admet pour base, v_4 .

Exercice 2 : Question de cours

Total de la partie 2 : 4 pts

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit $f : E \rightarrow E$ une application linéaire. On rappelle que par définition, le déterminant de f , noté $\det f$, est l'unique réel tel que pour toute forme n -linéaire alternée φ sur E , pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$,

$$\varphi(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = (\det f) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- (a) (1 point) Montrer que le déterminant de l'application identité de E notée id_E est égale à 1 :

$$\det id_E = 1.$$

Solution: Par définition, $id_E(x) = x$ pour tout $x \in E$. Donc

$$\varphi(id_E(x_1), id_E(x_2), \dots, id_E(x_n)) = 1 \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Donc par unicité, $\det id_E = 1$.

- (b) (3 points) Soient $f : E \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow E$ deux applications linéaires. Montrer que le déterminant de la composée de f et de g est égale au produit du déterminant de f et du déterminant de g :

$$\det(f \circ g) = (\det f) \times (\det g).$$

Solution: Par définition du déterminant de f puis par définition du déterminant de g

$$\begin{aligned} \varphi(f \circ g(x_1), f \circ g(x_2), \dots, f \circ g(x_n)) &= \varphi(f[g(x_1)], f[g(x_2)], \dots, f[g(x_n)]) \\ &= (\det f) \varphi(g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n)) = (\det f)(\det g) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Donc par unicité, $\det(f \circ g) = (\det f) \times (\det g)$.

Exercice 3 : Bilinéarité

Total de la partie 3 : 5 pts

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire alternée. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que si $\varphi(e_1, e_2) = \varphi(e_1, e_3) = \varphi(e_2, e_3) = 0$ alors φ est l'application constamment nulle.

Indication : On pourra montrer d'abord que pour $j = 1, 2$ et 3 et pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, e_j) = 0$.

Solution: Par antisymétrie, $\varphi(e_2, e_1) = -\varphi(e_1, e_2) = 0$, $\varphi(e_3, e_1) = -\varphi(e_1, e_3) = 0$ et $\varphi(e_3, e_2) = -\varphi(e_2, e_3) = 0$. Comme φ est alternée, $\varphi(e_1, e_1) = \varphi(e_2, e_2) = \varphi(e_3, e_3) = 0$. Bilan : pour tout i et j compris entre 1 et 3, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

Première méthode (explicite) : soit $x \in \mathbb{R}^3$. Alors x s'écrit comme combinaison linéaire $x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i$. Donc comme φ est linéaire par rapport à la première variable, pour $j = 1, 2$ et 3 , $\varphi(x, e_j) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \varphi(e_i, e_j) = 0$. Soit $y \in \mathbb{R}^3$. Alors y s'écrit comme combinaison linéaire $y = \sum_{j=1}^3 \beta_j e_j$. Donc comme φ est linéaire par rapport à la seconde variable, $\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^3 \beta_j \varphi(x, e_j) = 0$.

Seconde méthode (conceptuelle) : considérons les trois applications partielles ($j = 1, 2$ ou 3) $f_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_j(x) = \varphi(x, e_j)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. Comme φ est bilinéaire, ces applications partielles f_j sont linéaires. Comme $f_j(e_1) = \varphi(e_1, e_j) = 0$, $f_j(e_2) = \varphi(e_2, e_j) = 0$ et $f_j(e_3) = \varphi(e_3, e_j) = 0$ et qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base, ces applications partielles sont nulles : pour $j = 1, 2$ ou 3 et pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f_j(x) = \varphi(x, e_j) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^3$ quelconque fixé. Considérons l'application partielle $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(y) = \varphi(x, y)$. Comme φ est bilinéaire, cette application partielle g est linéaire. Comme $g(e_j) = \varphi(x, e_j) = 0$ pour $j = 1, 2$ et 3 et qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base, g est l'application nulle : pour tout $y \in \mathbb{R}^3$, $g(y) = \varphi(x, y) = 0$.

Remarque : On peut en déduire facilement maintenant que $(\Lambda^2 \mathbb{R}^3)^*$, l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^3$ est de dimension ≤ 3 . A l'exercice 1 de la feuille 2, on avait montré que $(\Lambda^2 \mathbb{R}^3)^*$ est de dimension ≥ 3 .