

Contrôle continu : Mercredi 11 Février 2026, 9h-10h30.

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...).

Les exercices sont indépendants. Le nombre total de points est 21.

Exercice 1 : Diagonalisation

Total de la partie 1 : 12 pts

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ définie pour tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$

$$\text{par } f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y + z + 3t \\ x + y + 3z + t \\ x + 3y + z + t \\ 3x + y + z + t \end{pmatrix}.$$

- (a) (1 point) Donner A , la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
- (b) (1 point) Calculer le déterminant de f .
- (c) (4 points) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f .
- (d) (6 points) Démontrer que f est diagonalisable.

Exercice 2 : Question de cours

Total de la partie 2 : 4 pts

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit $f : E \rightarrow E$ une application linéaire.

On rappelle que par définition, le déterminant de f , noté $\det f$, est l'unique réel tel que pour toute forme n -linéaire alternée φ sur E , pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$,

$$\varphi(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = (\det f) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- (a) (1 point) Montrer que le déterminant de l'application identité de E notée id_E est égale à 1 :

$$\det id_E = 1.$$

- (b) (3 points) Soient $f : E \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow E$ deux applications linéaires. Montrer que le déterminant de la composée de f et de g est égale au produit du déterminant de f et du déterminant de g :

$$\det(f \circ g) = (\det f) \times (\det g).$$

Exercice 3 : Bilinéarité

Total de la partie 3 : 5 pts

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire alternée. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que si $\varphi(e_1, e_2) = \varphi(e_1, e_3) = \varphi(e_2, e_3) = 0$ alors φ est l'application constamment nulle.

Indication : On pourra montrer d'abord que pour $j = 1, 2$ et 3 et pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, e_j) = 0$.