Université d'Angers **2024-25**

L2 Math-DL ME-DL MI **Module : Diagonalisation P8**

Contrôle continu : Mardi 11 Février 2025, 9h-10h30.

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...).
Les exercices sont indépendants. Le nombre total de points est 20.

Exercice 1 : Question de cours Total de la partie 1 : 4 pts

Soit E un espace vectoriel. Soit $u : E \to E$ une application linéaire. Soient λ_1 et λ_2, 2 valeurs propres distinctes de u. Montrer que la somme des sous-espaces propres associés $\ker(u - \lambda_1 id_E) + \ker(u - \lambda_2 id_E)$ est directe.

Solution: Soient $x_1 \in \ker(u - \lambda_1 id_E)$ et $x_2 \in \ker(u - \lambda_2 id_E)$ tels que $(L1)$ $x_1 + x_2 = 0$. En appliquant u à l'équation $(L1)$. Nous obtenons $(L2)$ $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$. En soustrayant λ_1 fois $(L1)$ à $(L2)$, nous obtenons $(L2 - \lambda_1 L1)$ $(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 = 0$. Comme $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, nous obtenons que $x_2 = 0$. D'après (L1), nous avons donc $x_1 = 0$.

Exercice 2 : Diagonalisation Total de la partie 2 : 11 pts

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ soit la matrice A.

(a) (1 point) Calculer le determinant de A.

Solution:

$$\det A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C1 & C2 & C3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C1+C2+C3 & C2 & C3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L1 \\ L2 - L1 \\ L3 - L1 \end{array}$$

$$= 1 \times (-1) \times (-1) = 1.$$

(b) (4 points) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f.

Solution: Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $f(v_1) = C1 + C2 + C3 = v_1$. Donc v_1 est un vecteur propre. Et pour calculer le polynôme caractéristique, nous allons additionner toutes les colonnes

$$\chi_f(X) = \begin{array}{c} \begin{matrix} C1 & C2 & C3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 2 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -2 & -2 & X+3 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C1+C2+C3 & C2 & C3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 2 \\ X-1 & X-1 & 2 \\ X-1 & -2 & X+3 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & X-1 & 2 \\ 1 & -2 & X+3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} == (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} L1 \\ L2-L1 \\ L3-L1 \end{array}$$

$$= (X-1)(X+1)^2.$$

Les valeurs propres de f sont 1 et -1.

(c) (4 points) Déterminer les sous-espaces propres de f et donner une base de chacun d'eux.

Solution: Cherchons $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 1x & + & 2y & - & 2z & = & 1x \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1y \\ 2x & + & 2y & - & 3z & = & 1z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & & & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x = y = z.$$

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $v_1 \in \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$. Comme v_1 est un vecteur non nul, la famille v_1 est libre.
Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$. Alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = xv_1$. Donc La famille v_1 est une famille génératrice de $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$. Bilan : la famille v_1 est une base de $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$.
Cherchons $\ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$, le sous-espace propre associé à la valeur propre -1.
Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 1x & + & 2y & - & 2z & = & -1x \\ 2x & + & y & - & 2z & = & -1y \\ 2x & + & 2y & - & 3z & = & -1z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x + y - z = 0$$

Soit $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Soit $v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Alors v_2 et $v_3 \in \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$.

Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$. Alors

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\y\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = xv_2 + yv_3.$$

Donc la famille v_2, v_3 est une famille génératrice de $\ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$.
Montrons que la famille v_2, v_3 est libre. Soient x et $y \in \mathbb{R}$ tels que

$$xv_2 + yv_3 = x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\y\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix} \text{ soit le vecteur nul } \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Alors $x = 0$, $y = 0$.
Bilan : la famille v_2, v_3 est une base de $\ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$.

(d) (2 points) En déduire en justifiant une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale.

Solution: La famille v_1 est une base de $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ La famille v_2, v_3 est une base de $\ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$. Comme la somme $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$ est directe, la réunion des bases v_1, v_2, v_3 est une base de $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$ qui est donc de dimension 3 et donc égale à $\mathbb{R}^3$. Comme $f(v_1) = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3$, $f(v_1)$ a pour vecteur coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Comme $f(v_2) = 0v_1 + (-1)v_2 + 0v_3$, $f(v_2)$ a pour vecteur coordonnées $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$. Comme $f(v_3) = 0v_1 + 0v_2 + (-1)v_3$, $f(v_3)$ a pour vecteur coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$. Donc f dans la base v_1, v_2, v_3 a pour matrice $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ qui est diagonale.

Exercice 3 : Déterminant d'ordre n Total de la partie 3 : 5 pts

Considérons le déterminant d'ordre n noté $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & \cdots & \cdots & n-1 & n \\ n & n & \cdots & \cdots & n & n \end{vmatrix}$.

Explicitement, Δ_n est le determinant de la matrice dont le coefficient à la i-eme et à la j-eme colonne est le maximum de i et de j.

(a) (1 point) Calculer Δ_2 et Δ_3.

Solution: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 2 \times 2 = -2$.

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L1-L2 \\ L2 \\ L3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L1-L2 \\ L2-L3 \\ L3 \end{matrix} = (-1) \times (-1) \times 3 = 3.$

(b) (4 points) Pour tout entier $n \geq 2$, calculer Δ_n.

Solution:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & \cdots & \cdots & n-1 & n \\ n & n & \cdots & \cdots & n & n \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_{n-1} \\ L_n \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & 0 \\ n & n & \cdots & \cdots & n & n \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2 \\ L_2 - L_3 \\ L_3 - L_4 \\ \vdots \\ L_{n-1} - L_n \\ L_n \end{matrix}$$

Donc comme la matrice est triangulaire inférieure, $\Delta_n = n(-1)^{n-1}$.