Université d'Angers **2024-25**
L2 Math-DL ME-DL MI **Module : Diagonalisation P8**

Contrôle continu : Mardi 11 Février 2025, 9h-10h30.

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...).
Les exercices sont indépendants. Le nombre total de points est 20.

Exercice 1 : Question de cours Total de la partie 1 : 4 pts

Soit E un espace vectoriel. Soit $u : E \to E$ une application linéaire. Soient λ_1 et λ_2, 2 valeurs propres distinctes de u. Montrer que la somme des sous-espaces propres associés $\ker(u - \lambda_1 id_E) + \ker(u - \lambda_2 id_E)$ est directe.

Exercice 2 : Diagonalisation Total de la partie 2 : 11 pts

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ soit la matrice A.

(a) (1 point) Calculer le determinant de A.

(b) (4 points) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f.

(c) (4 points) Déterminer les sous-espaces propres de f et donner une base de chacun d'eux.

(d) (2 points) En déduire en justifiant une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale.

Exercice 3 : Déterminant d'ordre n Total de la partie 3 : 5 pts

Considérons le déterminant d'ordre n noté $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & \cdots & \cdots & n-1 & n \\ n & n & \cdots & \cdots & n & n \end{vmatrix}$.

Explicitement, Δ_n est le determinant de la matrice dont le coefficient à la i-eme et à la j-eme colonne est le maximum de i et de j.

(a) (1 point) Calculer Δ_2 et Δ_3.

(b) (4 points) Pour tout entier $n \geq 2$, calculer Δ_n.