

Contrôle continu : Mercredi 15 Avril 2026, 9h-11h30. Tiers-Temps 9h-12h20

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...). Le nombre total de points est 20.

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

Total de la partie 1 : 4 pts

Si l'affirmation est vraie, la démontrer, et sinon, donner un contre-exemple. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Soient u et v une famille libre de deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .

- (a) (2 points) Si l'application f est injective alors la famille $f(u), f(v)$ est une famille libre de \mathbb{R}^3 ?

Solution: Oui. Preuve : Soient α et β deux réels tel que $\alpha f(u) + \beta f(v) = 0$. Alors $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = 0$. Donc comme f est injectif, $\alpha u + \beta v = 0$. Comme la famille u, v est libre, $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

- (b) (2 points) Si la famille $f(u), f(v)$ est une famille libre de \mathbb{R}^3 alors l'application f est injective ?

Solution: Non. Contrexemple : dans l'espace, prenons u le vecteur directeur de l'axe des x et v le vecteur directeur de l'axe des y et f la projection sur le plan Oxy engendré par u et v . Alors $f(u) = u$ et $f(v) = v$. Pourtant f envoie le vecteur directeur de l'axe des z sur le vecteur nul. Donc f n'est pas injectif.

Exercice 2 : La dérivation et la multiplication par X des polynômes Total de la partie 2 : 6 pts

Soit $\mathbb{R}[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et soit $\mathbb{R}_n[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$, où $n \geq 1$. Soit

$$D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$$

l'application de dérivation définie par $D(P) = P'$ où P' est le polynôme dérivé du polynôme P . Soit

$$M : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$$

l'application de multiplication par le monôme X définie par $M(P) = XP$.

- (a) (1 point) Montrer que $M \circ D$ et $D \circ M$, les applications composées de la dérivation et de la multiplication par X , induisent des applications linéaires de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution: La dérivation baisse le degré de 1 et la multiplication par X l'augmente de 1. Donc $M \circ D$ et $D \circ M$ sont bien des applications de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Comme la dérivation et la multiplication par X sont des applications linéaires, leurs composés sont aussi linéaires.

(b) (2 points) Montrer que $M \circ D \neq D \circ M$: D et M ne commutent pas. Calculer

$$D \circ M - M \circ D.$$

Solution:

$$(D \circ M)(P) - (M \circ D)(P) = (XP)' - XP' = P + XP' - XP' = P.$$

Donc $D \circ M - M \circ D$ est l'application identité.

(c) ($2\frac{1}{2}$ points) Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de $M \circ D$ et $D \circ M$. Montrer que $M \circ D$ et $D \circ M$ sont diagonalisables.

Solution: Pour tout i compris entre 0 et n , $M \circ D(X^i) = M(iX^{i-1}) = iX^i$. Donc les valeurs propres de $M \circ D$ sont les entiers de 0 à n . Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, $M \circ D$ est diagonalisable, les valeurs propres sont de multiplicité 1 et le sous-espace propre associée à la valeur propre i est de dimension 1. Donc les vecteurs propres associés à i sont les polynômes de la forme CX^i où C est une constante réelle. Pour $M \circ D$, c'est pareil sauf que les valeurs propres sont augmentes de 1.

(d) ($\frac{1}{2}$ point) En déduire leur déterminant.

Solution: Le determinant est le produit des valeurs propres. Donc $\det M \circ D$ est égale à la factorielle de $n + 1$ et $\det D \circ M$ est nulle.

Exercice 3 : Système différentiel d'ordre 1

Total de la partie 3 : 10 pts

Résoudre le système différentiel linéaire d'ordre 1

$$\begin{cases} x' = -2x + 6y - 2z \\ y' = -x + 3y - z \\ z' = -x + 3y + z \end{cases}$$

Solution: [?, Exemple 19-1.32] Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+2 & -6 & 2 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & -3 & X-1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} = \begin{vmatrix} X+2 & -6 & 2 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 0 & -X & X-2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 - L2 \end{array}$$

En développant par rapport à la dernière ligne

$$\chi_A(X) = X \begin{vmatrix} X+2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (X-2) \begin{vmatrix} X+2 & -6 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= X(X+2-2) + (X-2)((X+2)(X-3)+6) = X^2 + (X-2)(X^2-X) \\ &= X(X+(X-2)(X-1)) = X(X+X^2-3X+2) = X(X^2-2X+2).\end{aligned}$$

Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\chi_A(X)$ n'est pas scindé. Donc A n'est pas diagonalisable.

Quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\chi_A(X) = X((X-1)^2 - i^2) = X(X-1-i)(X-1+i)$. Donc A admet les trois valeurs propres 0 , $1+i$ et $1-i$ de multiplicité 1 . Donc A est diagonalisable.

Soit $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ l'application linéaire associée dans la base canonique.

Cherchons $\ker f$.

$$\begin{cases} -2x + 6y - 2z = 0 & (L1) \\ -x + 3y - z = 0 & (L2) \\ -x + 3y + z = 0 & (L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6y - 2z = 0 & (L1) \\ -x + 3y - z = 0 & (L2) \\ 2z = 0 & (L3 - L2) \end{cases}$$

Soit $x = 3y$ et $z = 0$. En prenant $y = 1$, on obtient le vecteur propre Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons $\ker(f - (1+i)id_{\mathbb{C}^3})$.

$$\begin{cases} -2x + 6y - 2z = (1+i)x \\ -x + 3y - z = (1+i)y \\ -x + 3y + z = (1+i)z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-3-i)x + 6y - 2z = 0 & (L1) \\ -x + (2-i)y - z = 0 & (L2) \\ -x + 3y - iz = 0 & (L3) \end{cases}$$

Prenons $-z$ dans la deuxième équation comme pivot. Alors le système est équivalent à

$$\begin{cases} (-1-i)x + (2+2i)y = 0 & (L1 - 2L2) \\ -x + (2-i)y - z = 0 & (L2) \\ (-1+i)x + (3-i(2-i))y = 0 & (L3 - iL2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+i)(-x) + 2(1+i)y = 0 & (L1') \\ -x + (2-i)y - z = 0 & (L2') \\ (-1+i)x + (2(1-i))y = 0 & (L3') \end{cases}$$

Les deux équations $L'1$ et $L'3$ sont donc proportionnelles à $-x + 2y = 0$. Donc $x = 2y$ et $L'2$ est équivalente à

$$z = -x + (2-i)y = -2y + 2y - iy = -iy$$

En prenant $y = 1$, on obtient le vecteur propre $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Comme $f(v_2) = Av_2 = (1+i)v_2$.

Donc $A\bar{v}_2 = (1-i)\bar{v}_2$. Posons $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$. Alors (v_1, v_2, \bar{v}_2) est une base de vecteurs propres de f . Les solutions complexes sont les fonctions vectorielles de la forme

$$X(t) = C_1 \exp(0t)v_1 + C_2 \exp((1+i)t)v_2 + C_3 \exp((1-i)t)\bar{v}_2.$$

où C_1 , C_2 et C_3 désignent trois constantes complexes.

$X(t)$ est une fonction à valeurs réelles ssi $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$C_1 v_1 + C_2 \exp((1+i)t)v_2 + C_3 \exp((1-i)t)\bar{v}_2 = \overline{C_1} v_1 + \overline{C_2} \exp((1-i)t)\bar{v}_2 + \overline{C_3} \exp((1+i)t)v_2$$

ssi $C_1 = \overline{C_1}$ et $C_3 = \overline{C_2}$. (Car v_1 , v_2 et \bar{v}_2 sont libres). En posant $C_1 = A$ et $C_2 = \frac{B+iC}{2}$, on obtient que les solutions réelles sont de la forme

$$X(t) = Av_1 + \frac{B+iC}{2} \exp((1+i)t)v_2 + \frac{B-iC}{2} \exp((1-i)t)\bar{v}_2$$

$$X(t) = Av_1 + 2\operatorname{Re} \left(\frac{B+iC}{2} \exp((1+i)t)v_2 \right)$$

$$X(t) = Av_1 + \operatorname{Re} [(B \exp t \cos t - C \exp t \sin t + iB \exp t \sin t + iC \exp t \cos t) v_2]$$

soit

$$x(t) = 3A + 2B \exp t \cos t - 2C \exp t \sin t,$$

$$y(t) = A + B \exp t \cos t - C \exp t \sin t,$$

$$z(t) = 0 + B \exp t \sin t + C \exp t \cos t.$$

où A , B et C désignent trois constantes réelles.