Université d'Angers **2025-26**
L2 Math-DL ME-DL MI **Module : Diagonalisation P9**

Contrôle continu : Mercredi 15 Avril 2026, 9h-11h30. Tiers-Temps 9h-12h20

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...). Le nombre total de points est 20.

Exercice 1 : Vrai ou faux ? Total de la partie 1 : 4 pts

Si l'affirmation est vraie, la démontrer, et sinon, donner un contre-exemple. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Soient u et v une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(a) (2 points) Si l'application f est injective alors la famille $f(u)$, $f(v)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

(b) (2 points) Si la famille $f(u)$, $f(v)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ alors l'application f est injective ?

Exercice 2 : La dérivation et la multiplication par X des polynômes Total de la partie 2 : 6 pts

Soit $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et soit $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$, où $n \geq 1$. Soit

$$D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$$

l'application de dérivation définie par $D(P) = P'$ où P' est le polynôme dérivé du polynôme P. Soit

$$M : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$$

l'application de multiplication par le monôme X définie par $M(P) = XP$.

(a) (1 point) Montrer que $M \circ D$ et $D \circ M$, les applications composées de la dérivation et de la multiplication par X, induisent des applications linéaires de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) (2 points) Montrer que $M \circ D \neq D \circ M$: D et M ne commutent pas. Calculer

$$D \circ M - M \circ D.$$

(c) ($2\frac{1}{2}$ points) Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de $M \circ D$ et $D \circ M$. Montrer que $M \circ D$ et $D \circ M$ sont diagonalisables.

(d) ($\frac{1}{2}$ point) En déduire leur déterminant.

Exercice 3 : Système différentiel d'ordre 1 Total de la partie 3 : 10 pts

Résoudre le système différentiel linéaire d'ordre 1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & -2x & + & 6y & - & 2z \\ y' & = & -x & + & 3y & - & z \\ z' & = & -x & + & 3y & + & z \end{array}\right.$$