Université d'Angers **2024-25**
L2 Math-DL ME-DL MI **Module : Diagonalisation P9**

Contrôle continu : Vendredi 25 Avril 2025, 9h-11h30. Tiers-Temps 9h-12h20

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...).
Le nombre total de points est 20.

Exercice 1 : Matrice d'une application linéaire Total de la partie 1 : 6 pts

Soit
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Soit f l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Soient $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) (1 point) Montrer que la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution: Montrons que la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) est une famille libre. Soient x, y et z telles que $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$. Alors

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -x + y \\ x = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$.

la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) est une famille libre à trois éléments dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc est une base.

(b) (2 points) Donner B, la matrice de f relativement à la base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$.

Solution: L'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ est donnée pour tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x - 3y + 2z \\ x + y - 2z \\ 2x + 4y - 4z \end{pmatrix}$.

$f(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f(v_3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exprimons $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base (v_1, v_2, v_3). Alors $f(v_1) = -2v_1 + 0v_2 + 0v_3$.

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ sont par définition les nombres réels x, y et z tels que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x\vec{v_1} + y\vec{v_2} + z\vec{v_3} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = a \\ x - y + z = b \\ x = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a + x \\ z = b - x + y \\ x = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a + c \\ z = a + b \\ x = c \end{cases}$$

En prenant $a = 0$, $b = 0$ et $c = -2$, on a $f(v_2) = -2v_1 + -2v_2 + 0v_3$.
En prenant $a = -3$, $b = 1$ et $c = 4$, on a $f(v_2) = 4v_1 + 1v_2 + (-2)v_3$.
Donc $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) (1 point) Donner le polynôme caractéristique de la matrice A.

Solution: Comme A et B représentent la même application linéaire f,

$$\chi_A(X) = \chi_f(X) = \chi_B(X) = \begin{vmatrix} X+2 & 2 & -4 \\ 0 & X+2 & -1 \\ 0 & 0 & X+2 \end{vmatrix} = (X+2)^3.$$

(d) (1 point) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution: Non. Démonstration par l'absurde. Supposons que f est diagonalisable.
Première méthode : Alors $\mathbb{R}^3$ est la somme des sous-espaces propres de f. Or -2 est la seule valeur propre de f. Donc $\mathbb{R}^3 = \ker(f + 2id_{\mathbb{R}^3})$. Donc f est $-2id_{\mathbb{R}^3}$. Donc $A = -2I_3$. Ce qui est faux.
Seconde méthode : Alors $A = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale composé des valeurs propres. Comme -2 est la seule valeur propre de f, $D = -2I_3$. Donc $A = P(-2I_3)P^{-1} = -2PI_3P^{-1} = -2PP^{-1} = -2I_3$.

(e) (1 point) Calculer $(A + 2I_3)^3$.

Solution: $(A+2I_3)^3 = \chi_A(A) = 0$ d'après le Théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 2 : Diagonalisation Total de la partie 2 : 7 pts

(a) (5 points) Résoudre le système différentiel d'ordre 1

$$\begin{cases} x' = 3x - 3y + 2z \\ y' = -x + 5y - 2z \\ z' = -x + 3y \end{cases}$$

Indication : Pour diagonaliser la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

on pourra remarquer que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une vecteur propre.

Solution: Soit f l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

$f(v_1) = C1 + C2 + C3 = 2v_1$. Donc v_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

Comme $e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2. Pour $X = 2$, les colonnes de $\chi_f(X)$ vérifient $C1 + C2 + C3 = 0$. Donc en faisant l'opération $C1 + C2 + C3$, on voit que $\chi_f(X)$ se factorise par $(X-2)$.

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} C1 & C2 & C3 \\ X-3 & 3 & -2 \\ 1 & X-5 & 2 \\ 1 & -3 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C1+C2+C3 & C2 & C3 \\ X-2 & 3 & -2 \\ X-2 & X-5 & 2 \\ X-2 & -3 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & X-5 & 2 \\ 1 & -3 & X \end{vmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{matrix} = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & X-8 & 4 \\ 0 & -6 & X+2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2-L1 \\ L3-L1 \end{matrix}$$

Donc

$$\chi_f(X) = (X-2)\begin{vmatrix} X-8 & 4 \\ -6 & X+2 \end{vmatrix} = (X-2)\left[(X-8)(X+2)+24\right] = (X-2)\left[X^2 - 6X + 8\right].$$

Le polynôme du second degré $X^2 - 6X + 8$ admet comme discriminant $\Delta = 4$ et comme racines 2 et 4. Donc $\chi_f(X) = (X-2)^2(X-4)$. Donc f admet 2 comme valeur propre de multiplicité et 4 comme valeur propre de multiplicité 1.

Cherchons $\ker(f-2id_{\mathbb{R}^3})$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker(f-2id_{\mathbb{R}^3})\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcr}3x&-&3y&+&2z&=&2x\\-x&+&5y&-&2z&=&2y\\-x&+&3y&&&=&2z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcr}x&-&3y&+&2z&=&0\\-x&+&3y&-&2z&=&0\\-x&+&3y&-&2z&=&0\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x-3y+2z=0$.

Soit $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$. Alors $\ker(f-2id_{\mathbb{R}^3})=\text{Vect }(\vec{v_1},\vec{v_2})$. Donc f est diagonalisable.

Cherchons le sous-espace propre associé à la valeur propre 4, $\ker(f-4id_{\mathbb{R}^3})$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker(f-4id_{\mathbb{R}^3})\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcrl}3x&-&3y&+&2z&=&4x&(L1)\\-x&+&5y&-&2z&=&4y&(L2)\\-x&+&3y&&&=&4z&(L3)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcrl}-x&-&3y&+&2z&=&0&(L1)\\-x&+&y&-&2z&=&0&(L2)\\-x&+&3y&-&4z&=&0&(L3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcrl}&-&4y&+&4z&=&0&(L1-L2)\\-x&+&y&-&2z&=&0&(L2)\\&+&2y&-&2z&=&0&(L3-L2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcr}x&=&y&-&2z&=&-z\\y&=&z&&&&\end{array}\right.$$

Alors $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ forme une base de $\ker(f-4id_{\mathbb{R}^3})$.

Donc la réunion des bases des sous-espaces propres, (v_1,v_2,v_3) est une base de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres 2 et 4. D'après un théorème du cours,

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=C_1\exp(2t)v_1+C_2\exp(2t)v_2+C_3\exp(4t)v_3.$$

Soit $x(t)=(C_1+3C_2)\exp(2t)-C_3\exp(4t)$,
$y(t)=(C_1+C_2)\exp(2t)+C_3\exp(4t)$,
$z(t)=C_1\exp(2t)+C_3\exp(4t)$
où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes réelles.

(b) (2 points) Résoudre le système différentiel d'ordre 1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr}x'&=&&-&3y&+&2z\\y'&=&-x&+&2y&-&2z\\z'&=&-x&+&3y&-&3z\end{array}\right.$$

Indication : Pour diagonaliser la matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

on pourra remarquer que $B = A - 3I_3$.

Solution: Soit g l'endomorphisme associé à B relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. Alors $g = f - 3id_{\mathbb{R}^3}$. Soit v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Alors $f(v) = \lambda v$. Donc $g(v) = f(v) - 3v = \lambda v - 3v = (\lambda - 3)v$. Donc v est un vecteur propre de g associé à la valeur propre $\lambda - 3$. Soit (v_1, v_2, v_3) la base de vecteurs propres de f trouvée à la question précédente associés respectivement aux valeurs propres 2, 2 et 4. Alors (v_1, v_2, v_3) est une base de vecteurs propres de g associés respectivement aux valeurs propres -1, -1 et 1.
D'après un théorème du cours,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = D_1 \exp(-t) v_1 + D_2 \exp(-t) v_2 + D_3 \exp(t) v_3.$$

Soit $x(t) = (D_1 + 3D_2)\exp(-t) - D_3 \exp(t)$,
$y(t) = (D_1 + D_2)\exp(-t) + D_3 \exp(t)$,
$z(t) = D_1 \exp(-t) + D_3 \exp(t)$
où D_1, D_2 et D_3 sont des constantes réelles.

Exercice 3 : Somme directe et équations différentielles Total de la partie 3 : 7 pts

Soit A et $B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées de taille n à coefficients réels tels que $AB = BA$ et tels que $A - B$ soit une matrice inversible.

On considère les deux systèmes d'équations différentielles d'ordre 1, $X'(t) = AX(t)$ et $X'(t) = BX(t)$.

Soit H l'ensemble des fonctions vectorielles dérivables $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $X'(t) = AX(t)$. Soit G l'ensemble des fonctions vectorielles dérivables $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $X'(t) = BX(t)$.

On considère le système d'équations différentielles d'ordre 2,

$$X''(t) = (A + B)X'(t) - ABX(t).$$

Soit F l'ensemble des fonctions vectorielles dérivables deux fois $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $X''(t) = (A + B)X'(t) - ABX(t)$.

(a) (1 point) Dans le cas où $n = 1$, donner F, G et H : c'est à dire résoudre les équations différentielles scalaires d'ordre 1 à coefficients constants, $x'(t) = Ax(t)$ et $x'(t) = Bx(t)$ et l'équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients constants $x''(t) = (A + B)x'(t) - ABx(t)$ lorsque A et B sont deux réels distincts.

Solution: F est l'ensemble des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $x(t) = C\exp(At)$ où C constante réelle. G est l'ensemble des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $x(t) = D\exp(Bt)$ où D constante réelle. L'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants $x"(t) = (A+B)x'(t) - ABx(t)$ à pour polynôme caractéristique $\lambda^2 - (A+B)\lambda + AB = (\lambda - A)(\lambda - B)$ qui a deux racines distinctes A et B car par hypothèse $A - B \neq 0$. D'après le cours, H, l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $x(t) = C\exp(At) + D\exp(Bt)$ où C et D sont deux constantes réelles.

(b) (1 point) Montrer que F est un espace vectoriel.

Solution: Montrons que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. La fonction nulle vérifie l'équation donc appartient à F. Soient $X(t)$ et $Y(t) \in F$. Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors X et Y sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et $X"(t) = (A+B)X'(t) - ABX(t)$ et $Y"(t) = (A+B)Y'(t) - ABY(t)$. Donc $\alpha X + \beta Y$ est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$(\alpha X + \beta Y)"(t) = \alpha X"(t) + \beta Y"(t) = (A+B)\alpha X'(t) - AB\alpha X(t) +$$

$$(A+B)\beta Y'(t) - AB\beta Y(t) = (A+B)(\alpha X' + \beta Y')(t) - AB(\alpha X + \beta Y)(t).$$

Donc $(\alpha X + \beta Y)(t) \in F$.

(c) (1 point) Montrer que H et G sont des parties de F.

Solution: Soit $X \in H$. Alors $X' = AX$. Donc X est deux fois dérivable et $X" = AX' = A(AX) = A^2X$. Donc $X" - (A+B)X' + ABX = A^2X - (A+B)AX + ABX = (AB - BA)X = 0$. Donc $X \in F$. Par symétrie entre A et B, si $X \in G$ alors $X \in F$.

(d) (1 point) Montrer que H et G sont des sous-espaces vectoriels de F.

Solution: Soient $X(t)$ et $Y(t) \in H$. Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors X et Y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $X'(t) = AX(t)$ et $Y'(t) = AY(t)$. Donc $\alpha X + \beta Y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(\alpha X + \beta Y)'(t) = \alpha X'(t) + \beta Y'(t) = \alpha AX(t) + \beta AY(t) = A(\alpha X + \beta Y)(t).$$

Donc $(\alpha X + \beta Y)(t) \in H$. Donc comme H est une partie de F, H est un sous-espace vectoriel de F. De même, G est un sous-espace vectoriel de F.

(e) (1 point) Montrer que $H \cap G = \{0\}$.

Solution: Soit $X \in H \cap G$. Alors $X' = AX = BX$. Donc $(A-B)X = 0$. Donc $X = (A-B)^{-1}(A-B)X = (A-B)^{-1}(0) = 0$.

(f) (1 point) Montrer que $H \oplus G = F$. Indication : on pourra écrire que

$$X = (A-B)^{-1}\left(AX - X' + X' - BX\right).$$

Solution: On a bien

$$X = (A-B)^{-1}\left(AX - X'\right) + (B-A)^{-1}\left(BX - X'\right).$$

Soit $Y = (A-B)^{-1}\left(AX - X'\right)$. Alors pour $X \in F$,

$$Y' = (A-B)^{-1}\left(AX' - X''\right) = (A-B)^{-1}\left(AX' - (A+B)X' + ABX\right) =$$

$$(A-B)^{-1}\left(-BX' + BAX\right) = (A-B)^{-1}B\left(-X' + AX\right) = B(A-B)^{-1}\left(AX - X'\right) = BY.$$

Donc $Y \in G$. Par symétrie $G = (B-A)^{-1}\left(BX - X'\right) \in F$

(g) (1 point) Supposons que A et B sont les deux matrices de l'exercice précédent. Donner l'ensemble F.

Solution: L'exercice précédent donne les sous-espaces vectoriels H et G. Comme $H \oplus G = F$, F est l'ensemble des

$$X(t) = C_1\exp(2t)v_1 + C_2\exp(2t)v_2 + C_3\exp(4t)v_3 + D_1\exp(-t)v_1 + D_2\exp(-t)v_2 + D_3\exp(t)v_3.$$

où C_1, C_2, C_3, D_1, D_2 et D_3 sont des constantes réelles.