Université d'Angers **2024-25**
L2 Math-DL ME-DL MI **Module : Diagonalisation P9**

Contrôle continu : Vendredi 25 Avril 2025, 9h-11h30. Tiers-Temps 9h-12h20

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...).
Le nombre total de points est 20.

Exercice 1 : Matrice d'une application linéaire Total de la partie 1 : 6 pts

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Soit f l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Soient $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) (1 point) Montrer que la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) (2 points) Donner B, la matrice de f relativement à la base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$.

(c) (1 point) Donner le polynôme caractéristique de la matrice A.

(d) (1 point) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(e) (1 point) Calculer $(A + 2I_3)^3$.

Exercice 2 : Diagonalisation Total de la partie 2 : 7 pts

(a) (5 points) Résoudre le système différentiel d'ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 3x & - & 3y & + & 2z \\ y' & = & -x & + & 5y & - & 2z \\ z' & = & -x & + & 3y & & \end{array} \right.$$

Indication : Pour diagonaliser la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

on pourra remarquer que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une vecteur propre.

(b) (2 points) Résoudre le système différentiel d'ordre 1

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & & - & 3y & + & 2z \\ y' & = & -x & + & 2y & - & 2z \\ z' & = & -x & + & 3y & - & 3z \end{array}\right.$$

Indication : Pour diagonaliser la matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

on pourra remarquer que $B = A - 3I_3$.

Exercice 3 : Somme directe et équations différentielles Total de la partie 3 : 7 pts

Soit A et $B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées de taille n à coefficients réels tels que $AB = BA$ et tels que $A - B$ soit une matrice inversible.

On considère les deux systèmes d'équations différentielles d'ordre 1, $X'(t) = AX(t)$ et $X'(t) = BX(t)$.

Soit H l'ensemble des fonctions vectorielles dérivables $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $X'(t) = AX(t)$. Soit G l'ensemble des fonctions vectorielles dérivables $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $X'(t) = BX(t)$.

On considère le système d'équations différentielles d'ordre 2,

$$X"(t) = (A + B)X'(t) - ABX(t).$$

Soit F l'ensemble des fonctions vectorielles dérivables deux fois $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $X"(t) = (A + B)X'(t) - ABX(t)$.

(a) (1 point) Dans le cas où $n = 1$, donner F, G et H : c'est à dire résoudre les équations différentielles scalaires d'ordre 1 à coefficients constants, $x'(t) = Ax(t)$ et $x'(t) = Bx(t)$ et l'équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients constants $x"(t) = (A + B)x'(t) - ABx(t)$ lorsque A et B sont deux réels distincts.

(b) (1 point) Montrer que F est un espace vectoriel.

(c) (1 point) Montrer que H et G sont des parties de F.

(d) (1 point) Montrer que H et G sont des sous-espaces vectoriels de F.

(e) (1 point) Montrer que $H \cap G = \{0\}$.

(f) (1 point) Montrer que $H \oplus G = F$. Indication : on pourra écrire que

$$X = (A - B)^{-1} \left(AX - X' + X' - BX\right).$$

(g) (1 point) Supposons que A et B sont les deux matrices de l'exercice précédent. Donner l'ensemble F.