Diagonalisation[1]
L2 Math, Double Licence Math-Eco, Math-Info et L3PPPE
P8-9

Luc Menichi

1. 18 mars 2025

Table des matières

Ce cours s'inspire du cours de mon professeur de math supérieure Jean Voedts et de mes bibles [**RDO82, AF87, Voe02**].

Pour vous déplacer dans le fichier pdf, veuillez cliquer sur la table des matières ou sur les numéros des théorèmes, propositions....

Chapitre 1

Determinants

A taper

1. Equations linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. L'ensemble des solutions $x \in E$ de cet équation linéaire sans second membre (ou homogène) $f(x) = 0$ est un sous-espace vectoriel de E, le noyau de f, $\ker f$.

PROPOSITION 1.1. [**RDO82**, 11.2.1.2° théorème II] *Soit $y \in F$. L'ensemble des solutions $x \in E$ de l'équation linéaire avec second membre $f(x) = y$ est*

-soit vide si y n'appartient pas à l'image de f.

-soit est de la forme $x_0 + \ker f$ où x_0 est une solution particulière l'équation linéaire avec second membre $f(x) = y$ si si y appartient à l'image de f.

En particulier, si l'équation à une unique solution alors $\ker f = \{0\}$, c'est à dire f est injectif.

DÉMONSTRATION. Si l'ensemble des solutions $x \in E$ de l'équation linéaire avec second membre $f(x) = y$ n'est pas vide, soit x_0 une telle solution. Alors $f(x_0) = y$. Soit $x \in E$. Alors x est solution de $f(x) = y$ si et seulement si

$$f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x - x_0) = 0$$

si et seulement si $x - x_0$ est solution de l'équation $f(x) = 0$ si et seulement si $x = x_0 + z$ où $z \in \ker f$. □

EXEMPLE 1.2. Système linéaire de p à q inconnues.

$$\left\{\begin{array}{llllllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1q}x_q & = & b_1 & L1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2q}x_q & = & b_2 & L2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \dots & + & a_{pq}x_n & = & b_q & L_p \end{array}\right.$$

EXEMPLE 1.3. Equations différentielles linéaires.

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$$

EXEMPLE 1.4. Équation diophantienne : $ax + by = c$ où a, b et c sont des entiers relatifs. On cherche les couples d'entiers relatifs (x, y) solution.

En fait, la proposition précédente n'utilise que la structure de groupes des espaces vectoriels (Elle marche même pour des groupes non abeliens) Soit $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto ax + by$. Alors f est un morphisme de groupes abeliens

EXEMPLE 1.5. Soit $f : (\mathbb{C}^{-\{0\}}, 1) \to (\mathbb{C}^{-\{0\}}, 1)$, $z \mapsto z^n$. Alors f est un morphisme de groupes abéliens pour le produit des nombres complexes. Alors le noyau de f est le groupe des racines n-ièmes de l'unité 1. On obtient les racines n-ièmes d'un nombre complexe en multipliant l'une d'entre elles par les racines n-ièmes de l'unité.

Chapitre 2

Diagonalisation

1. Rappels sur les sommes directes

Soit E un espace vectoriel. Soient $F_1,\ldots, F_p$, p sous-espaces vectoriels de E.

Definition 2.1. L'ensemble des vecteurs de la forme $x_1+\cdots+x_p$ où $x_1 \in F_1,\ldots, x_p \in F_p$, est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de $F_1, \ldots, F_p$, noté $F_1 + \cdots + F_p$.

Propriété 2.2. $F_1 + F_2 + F_3 = (F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$. (Associativité)
$F_1 + \{0\} = F_1$ (Élément neutre)
$F_1 + F_2 = F_2 + F_1$. (Commutativité)

Definition 2.3. On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est *directe* si pour tout vecteur x_1 de $F_1,\ldots$, tout vecteur x_p de F_p, on a l'implication

$$x_1 + \cdots + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0.$$

Dans ce cas, on note la somme $F_1 + \cdots + F_p$ par $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Propriété 2.4. La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe si et seulement si l'écriture de tout élément $x_1 + \cdots + x_p$ de la somme est unique.
La somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si l'intersection $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.
Si la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe alors pour tout $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0\}$. Réciproque fausse pour $p \geq 3$: Trois droites vectoriels qui se coupent en $\{0\}$ ne sont pas en somme directe si elles sont coplanaires.

Démonstration. Facile à faire soi-même. □

Proposition 2.5. *Soit $\beta_1 = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F_1. Soit $\beta_2 = (e_{p+1}, \ldots, e_{p+q})$ une base de F_2. Alors la réunion des bases $\beta_1 \cup \beta_2 = (e_1, \ldots, e_{p+q})$ est une base de la somme $F_1 + F_2$ si et seulement si la somme $F_1 + F_2$ est directe. En particulier*

$$\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim F_1 + \dim F_2.$$

Démonstration. Montrons déjà que $(e_1, \ldots, e_{p+q})$ est une famille génératrice de la somme $F_1 + F_2$. Soit $y \in F_1 + F_2$. Alors il existe $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tels que $y = x_1 + x_2$. Comme $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille génératrice de F_1, il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tels que

$$x_1 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i.$$

Comme $(e_{p+1}, \ldots, e_{p+q})$ est une famille génératrice de F_2, il existe des scalaires $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+q}$ tels que

$$x_2 = \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i e_i.$$

Donc

$$y = x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{p+q} \alpha_i e_i.$$

Par conséquent, $(e_1, \ldots, e_{p+q})$ est une famille génératrice de la somme $F_1 + F_2$ [1].

1. Nous avons démontré $\mathrm{Vect}(\beta_1 \cup \beta_2) = \mathrm{Vect}(\beta_1) + \mathrm{Vect}(\beta_2)$

Supposons maintenant que la somme $F_1 + F_2$ est directe. Montrons que $(e_1, \dots, e_{p+q})$ est une famille libre. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+q}$ des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^{p+q} \alpha_i e_i = 0.$$

Posons

$$x_1 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \text{ et } x_2 = \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i e_i.$$

Alors $x_1 + x_2 = 0$. Comme $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ et la somme $F_1 + F_2$ est directe, $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre,

$$x_1 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i = 0$$

implique $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$. Comme $(e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$ est une famille libre,

$$x_2 = \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i e_i = 0$$

implique $\alpha_{p+1} = \dots = \alpha_{p+q} = 0$. On a donc démontré que $\alpha_1 = \dots = \alpha_{p+q} = 0$. Donc $(e_1, \dots, e_{p+q})$ est une famille libre, et puisque $(e_1, \dots, e_{p+q})$ est une famille génératrice de la somme $F_1 + F_2$, $(e_1, \dots, e_{p+q})$ est donc une base de la somme $F_1 + F_2$. En particulier $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$.

Réciproquement, supposons que $(e_1, \dots, e_{p+q})$ est une base de la somme $F_1 + F_2$. Soit $x \in F_1 \cap F_2$. On peut, par hypothèse, écrire $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$ et $x = \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i e_i$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+q}$ sont des scalaires. De ceci on déduit $\sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i = 0$, et puisque $(e_1, \dots, e_{p+q})$ est libre, on trouve $\alpha_1 = \dots = \alpha_{p+q} = 0$, donc $x = 0$. La somme $F_1 + F_2$ est donc directe. □

2. Décomposition d'un espace vectoriel en sous-espaces stables

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u : E \to E$ une application linéaire.

Definition 2.6. Soit F un sous-espace vectoriel de E, on dit que F est *stable* par u si $u(F) \subset F$.

Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Comme $\forall x \in F$, $u(x) \in F$, La restriction de u à F, $u_{|F} : F \to E$ induit une application linéaire de F dans F, que par abus de notation, on notera $u_{|F}$.

Supposons que E est la somme directe $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ de p sous-espaces vectoriels de E stables par u. Soit β_i une base de chacun des sous-espaces vectoriels F_i. Soit A_i la matrice de $u_{|F_i}$ relativement à cette base. Comme E est la somme directe $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$, la famille β obtenue par réunion des bases β_i est une base de E. Soit A la la matrice de u relativement à cette base β. Alors A est la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix}$.

L'étude de l'endomorphisme u se ramène donc à l'étude de ces restrictions $u_{|F_i}$. Le but de la réduction des endormorphismes est de trouver une décomposition de E en sous-espaces stables sur lesquel les restrictions $u_{|F_i}$ sont des applications simples.

3. Sous-espaces propres

Parmi les sous-espaces stables, nous nous intéresserons surtout aux sous-espaces propres (sous-espaces stables pour lesquels l'application induite est une homothétie).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ou infinie. Soit $u : E \to E$ une application linéaire.

DEFINITION 2.7. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une *valeur propre* de u si il existe un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$.

DEFINITION 2.8. Soit λ une valeur propre de u. On appelle *vecteur propre* de u (associé à la valeur propre λ), tout vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$.

PROPRIÉTÉ 2.9. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Le scalaire λ est valeur propre de u si et seulement si $\ker(u - \lambda id_E) \neq \{0\}$ si et seulement si l'application linéaire $u - \lambda id_E$ n'est pas injective.

DÉMONSTRATION. En effet, soit $x \in E$. $u(x) = \lambda x \Leftrightarrow u(x) - \lambda id_E(x) = 0 \Leftrightarrow (u - \lambda id_E)(x) = 0$. □

DEFINITION 2.10. Supposons que λ est une valeur propre de u. On appelle *sous-espace propre* associée à la valeur propre λ, le sous-espace vectoriel stable par u, $\ker(u - \lambda id_E)$. Ce sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ est formé de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du vecteur nul.

THÉORÈME 2.11. [**RDO82**, 12.1.1.2° théorème II][**AF87**, Théorème XV.3.1][**Voe02**, Théorème 5-4.9] *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ p valeurs propres distinctes de u. Alors la somme des sous-espaces propres associés $\ker(u - \lambda_1 id_E) + \cdots + \ker(u - \lambda_p id_E)$ est directe.*

DÉMONSTRATION. Faisons une démonstration par récurrence sur p. Cas $p = 1$. Il n'y a rien à démontrer. Cas $p \geq 2$. Supposons que la somme $\ker(u - \lambda_1 id_E) + \cdots + \ker(u - \lambda_{p-1} id_E)$ est directe. Soient $x_i \in \ker(u - \lambda_i id_E)$ tels que $(L1)$ $x_1 + \cdots + x_p = 0$. En appliquant u à l'équation $(L1)$. Nous obtenons $(L2)$ $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0$. En soustrayant λ_p fois $(L1)$ à $(L2)$, nous obtenons $(L2 - \lambda_p L1)$ $(\lambda_1 - \lambda_p)x_1 + \cdots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p)x_{p-1} = 0$. Comme la somme $\ker(u - \lambda_1 id_E) + \cdots + \ker(u - \lambda_{p-1} id_E)$ est directe, on a donc $(\lambda_1 - \lambda_p)x_1 = 0, \dots, (\lambda_{p-1} - \lambda_p)x_{p-1} = 0$. Comme λ_p est distincte de $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$, on a donc $x_1 = 0, \dots, x_{p-1} = 0$. L'équation $(L1)$ donne alors $x_p = 0$. Nous avons donc montré que la somme $\ker(u - \lambda_1 id_E) + \cdots + \ker(u - \lambda_p id_E)$ est directe. □

4. Polynômes caractéristiques

Supposons que E est de dimension finie. Soit $u : E \to E$ une application linéaire.

PROPRIÉTÉ 2.12. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Le scalaire λ est valeur propre de u si et seulement si $\det(u - \lambda id_E) = 0$.

DEFINITION 2.13. On appelé *polynôme caractéristique* de u, noté χ_u, la fonction $\chi_u(X) = \det(X id_E - u)$ pour tout $X \in \mathbb{K}$.

Dans la proposition suivante, nous verrons que cette fonction est bien une fonction polynômiale.

PROPOSITION 2.14. *Le polynôme caractéristique de M, χ_M, est un polynôme unitaire de degré n de la forme*

$$\chi_M(X) = X^n - \operatorname{tr} M X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det M.$$

DÉMONSTRATION. Soit $M = (m_{ij})$. Soit S_n l'ensemble des bijections σ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même. On rappelle que le déterminant de M est donné par

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) m_{1\sigma(1)} \dots m_{n\sigma(n)}.$$

où ε est une application de S_n vers l'ensemble $\{-1,+1\}$ appélée *signature*. Soit δ_{ij} les symboles de Kronecker définis par $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors

$$\det(XI_n - M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(X\delta_{1\sigma(1)} - m_{1\sigma(1)}) \cdots (X\delta_{n\sigma(n)} - m_{n\sigma(n)}).$$

On voit donc que $\chi_M(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. En distinguant l'identité id des autres éléments de S_n dans la somme, comme $\varepsilon(id) = +1$,

$$\chi_M(X) = (X - m_{11}) \cdots (X - m_{nn}) + \sum_{\sigma \in S_n - \{id\}} \varepsilon(\sigma)(X\delta_{1\sigma(1)} - m_{1\sigma(1)}) \cdots (X\delta_{n\sigma(n)} - m_{n\sigma(n)}).$$

Si $\sigma \neq id$, alors il existe i tel que $\sigma(i) \neq i$. Comme σ est injectif, on a aussi $\sigma(\sigma(i)) \neq \sigma(i)$. En posant $j = \sigma(i)$, nous avons trouvé deux éléments distincts i et j de $\{1, \ldots, n\}$ tels que $\delta_{i\sigma(i)}$ et $\delta_{j\sigma(j)}$ soient nuls et donc le terme $\varepsilon(\sigma)(X\delta_{1\sigma(1)} - m_{1\sigma(1)}) \cdots (X\delta_{n\sigma(n)} - m_{n\sigma(n)})$ est de degré inférieur ou égal à $n-2$. Les termes de degré n et $n-1$ de $\chi_M(X)$ sont donc ceux du produit $(X - m_{11}) \cdots (X - m_{nn})$, à savoir $X^n - (m_{11} + \cdots + m_{nn})X^{n-1}$.

On obtient finalement le terme constant en évaluant en 0 :

$$\chi_M(0) = \det(0I_n - M) = \det(-M) = (-1)^n \det(M).$$

□

COROLLAIRE 2.15. *Les racines $\lambda \in \mathbb{K}$ du polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ sont exactement les valeurs propres de M.*

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après la propriété 2.12, λ est valeur propre de M si et seulement si $\det(\lambda I_n - M) = 0 \Leftrightarrow \chi_M(\lambda) = 0$. □

Exercice 1

Soit $P(X) = X^q + \alpha_{q-1}X^{q-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$ un polynôme unitaire de degré q. Considérons la matrice carrée à q lignes appelée *matrice compagnon*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{q-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que χ_M, le polynôme caractéristique de M est égal à P.

Solution de l'exercice 1

Faisons une démonstration par récurrence sur q.

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \ldots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & X & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & X + \alpha_{q-1} \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne,

$$\chi_M(X) = X \begin{vmatrix} X & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ -1 & X & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & \alpha_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & X + \alpha_{q-1} \end{vmatrix} + (-1)^{q-1}\alpha_0 \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \ldots & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Donc d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\chi_M(X) = X(X^{q-1} + \alpha_{q-1}X^{q-2} + \cdots + \alpha_1) + (-1)^{q-1}(-1)^{q-1}\alpha_0.$$

□

Exercice 2

Donner le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ -a & 0 & -b & -c \\ -a & -b & 0 & -c \\ -a & -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 2

Le polynôme caractéristique est $D = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$.

Première méthode : Examen janvier 2023 Evidemment, on additionne à la première colonne, toutes les autres colonnes. Donc

$$D = \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ a+x+b+c & x & b & c \\ a+b+x+c & b & x & c \\ a+b+c+x & b & c & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & b & c \\ 1 & b & x & c \\ 1 & b & c & x \end{vmatrix}$$

On fait maintenant la méthode du pivot de Gauss : on soustrait la premiere ligne à chacune des autres lignes.

$$D = (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & x-b & 0 \\ 0 & b-a & c-b & x-c \end{vmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2-L1 \\ L3-L1 \\ L4-L1 \end{matrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient une matrice triangulaire inférieure

$$D = (x+a+b+c) \times 1 \times \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ b-a & x-b & 0 \\ b-a & c-b & x-c \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c).$$

Seconde méthode : D est un polynôme unitaire de degré 4, qui admet a, b et c comme racines.

Car quand $x = a$, la première ligne et la seconde ligne sont identiques. Quand $x = b$, la deuxième ligne et la troisième ligne sont identiques. Quand $x = c$, la troisième ligne et la quatrième ligne sont identiques.

Si a, b et c sont distincts deux à deux, D admet trois racines distinctes et donc admet une quatrieme racine α. Donc $D = (x-a)(x-b)(x-c)(x-\alpha) = x^4 - (a+b+c+\alpha)x^3 + \cdots$ D'après la proposition 2.14, le coefficient devant x^3 est $-\operatorname{tr} M = 0$. Donc $(a+b+c+\alpha) = 0$. Donc $\alpha = -(a+b+c)$. Donc $D = (x-a)(x-b)(x-c)(x+a+b+c)$.

Théorème 2.16. [**RDO82**, 12.2.1.3° Proposition II][**AF87**, Théorème XV.1.3][**Voe02**, Théorème 5-4.26] *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Soit $u_{|F} : F \to F$ la restriction de u à F. Alors $\chi_{u_{|F}}$, le polynôme caractéristique de $u_{|F}$ divise χ_u, le polynôme caractéristique de u.*

Démonstration. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ une base de F. Soit A la matrice de $u_{|F}$ relativement à cette base. Complétons cette famille libre $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ en une base de E. La matrice de u relativement à cette base est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Donc le polynôme caractéristique de u est égal au produit du polynôme caractéristique de $u_{|F}$ par le polynôme caractéristique de C :

$$\chi_u(X) = \chi_{u_{|F}}(X)\chi_C(X).$$

□

Definition 2.17. Si λ est une valeur propre de u, on appelle *multiplicité de la valeur propre* λ, sa multiplicité comme racine de $\chi_u(X)$, le polynôme caractéristique de u.

Théorème 2.18. [**RDO82**, 12.2.1.4° Proposition][**AF87**, Théorème XV.3.2][**Voe02**, Corollaire 5-4.27] *Si λ est une valeur propre de u de multiplicité k, alors*

$$1 \leq \dim \ker(u - \lambda id_E) \leq k.$$

En particulier, le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est de dimension 1.

Démonstration. Soit $F := \ker(u - \lambda id_E)$ le sous-espace propre associée à la valeur propre λ. Soit d sa dimension. Comme F n'est pas réduit à $\{0\}$, $d \geq 1$. D'après le théorème 2.16, le polynôme caractéristique de u_F, $\chi_{u_{|F}}(X)$, divise le polynôme caractéristique de u, $\chi_u(X)$. Comme $u_{|F}$ est égale à λid_F, $\chi_{u_{|F}}(X) = (X - \lambda)^d$. Puisque $(X - \lambda)^d$ divise $\chi_u(X)$, λ est une racine de $\chi_u(X)$, de multiplicité supérieur ou égal à d. □

5. Diagonalisation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u : E \to E$ une application linéaire.

Definition 2.19. On dit que u est *diagonalisable* si E est la somme (nécéssairement directe) de tous ses espaces propres.

Lemme 2.20. [**RDW01**, Chap. 8 Corollaire 46]. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ toutes les valeurs propres de u. Alors u est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de tous les sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace total :*

$$\sum_{i=1}^{p} \dim \ker(u - \lambda_i id_E) = n.$$

Démonstration. Comme la somme des sous-espaces propres est directe,

$$\dim\left(\ker(u - \lambda_1 id_E) + \cdots + \ker(u - \lambda_p id_E)\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim \ker(u - \lambda_i id_E).$$

Le sous-espace de E, $\ker(u - \lambda_1 id_E) \oplus \cdots \oplus \ker(u - \lambda_p id_E)$, coincide avec E si et seulement sa dimension est égale à celle de E. □

Corollaire 2.21. *Si u admet n valeurs propres distinctes, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ alors u est diagonalisable.*

Démonstration. Comme λ_i est une valeur propre, $\dim \ker(u - \lambda_i id_E) \geq 1$, donc

$$n \geq \sum_{i=1}^{n} \dim \ker(u - \lambda_i id_E) >= n.$$

Donc d'après le lemme 2.20, u est diagonalisable. □

Théorème 2.22. [**RDO82**, 12.2.2.1° Théorème fondamental][**AF87**, Théorème XV.3.2][**Voe02**, Théorème 5-5.5] *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) u est diagonalisable,

2) il existe une base de E formée de vecteurs propres de u,

3) il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale,

4) le polynôme caractéristique de u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et, pour toute valeur propre de u, la multiplicité est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

Démonstration. Vidéo

1) $\Rightarrow$ 2) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ toutes les valeurs propres de u. Soient β_i une base de $\text{Ker}\,(u - \lambda_i id_E)$ pour i compris entre 1 et p. Supposons que u est diagonalisable. Alors

$$E = \text{Ker}\,(u - \lambda_1 id_E) \oplus \cdots \oplus \ker(u - \lambda_p id_E).$$

Donc [**RDO82**, 9.1.2.9° Théorème réciproque] la réunion des bases β_i est une base β de E.

2) $\Rightarrow$ 1) Soit $\beta = e_1, \dots, e_n$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u. Comme $e_1, \dots, e_n$ sont des vecteurs propres de u, l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ est inclus dans la somme $\text{Ker}\,(u - \lambda_1 id_E) + \cdots + \ker(u - \lambda_p id_E)$. Mais comme β est une base, cet espace vectoriel engendré par les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ est égale à E. Donc E est égale à la somme $\text{Ker}\,(u - \lambda_1 id_E) + \cdots + \ker(u - \lambda_p id_E)$. C'est à dire u est diagonalisable.

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $\beta = e_1, \dots, e_n$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Comme e_i est un vecteur propre de u, il existe un $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \alpha_i e_i$. Donc la matrice de u dans cette base, est la matrice diagonale avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ comme éléments sur la diagonale.

3) $\Rightarrow$ 2) Supposons qu'il existe une base $\beta = e_1, \dots, e_n$ de E telle que la matrice de u soit une matrice diagonale D. Donc e_i est un vecteur propre de u.

1) $\Rightarrow$ 4) utilisant 1) $\Rightarrow$ 2) et 2) $\Rightarrow$ 3) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ toutes les valeurs propres de u. Soit d_i la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i. Soit $\beta_i = (e_{d_1+\cdots+d_{i-1}+1}, \dots, e_{d_1+\cdots+d_i})$ une base de $\text{Ker}\,(u - \lambda_i id_E)$ pour i compris entre 1 et p. D'après 1) $\Rightarrow$ 2) et 2) $\Rightarrow$ 3), $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale, plus précisément la matrice par blocs $\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p I_{d_p} \end{pmatrix}$. En calculant le polynôme caractéristique de cette matrice diagonale, nous obtenons que

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{d_i}.$$

Donc χ_u est scindé et a pour racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ avec les multiplicités $d_1, \dots, d_p$.

4) $\Rightarrow$ 1) Supposons que

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{d_i}.$$

où $\forall i$, d_i est la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i. Comme $\chi_u(X)$ est de degré n,

$$\sum_{i=1}^{p} d_i = n.$$

Donc d'après le Lemme 2.20, u est diagonalisable. $\square$

Exercice 3

Démontrer 3) $\Rightarrow$ 4) directement.

Solution de l'exercice 3

3) $\Rightarrow$ 4) Supposons qu'il existe une base $\beta = e_1, \ldots, e_n$ de E telle que la matrice de u soit une matrice diagonale D. Donc e_i est un vecteur propre de u.

Soient λ_1,…,λ_p les éléments diagonaux distincts de D qui se retrouvent respectivement m_1 fois,…, m_p fois. En échangeant les éléments de la base, nous pouvons supposer que D est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix}$. C'est à dire nous pouvons supposer que que e_1,…,e_{m_1} sont m_1 vecteurs propres associés à la valeur propre λ_1, e_{m_1+1}, …, $e_{m_1+m_2}$ sont m_2 vecteurs propres associés à la valeur propre λ_2, …, $e_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1}$, …, $e_{m_1+\cdots+m_p}$ sont m_p vecteurs propres associés à la valeur propre λ_p. En calculant le polynôme caractéristique de la matrice diagonale, nous obtenons que

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

Donc χ_u est scindé et a pour racines λ_1,…,λ_p avec les multiplicités m_1,…,m_p. Comme χ_u est de degré n, $n = m_1 + \cdots + m_p$.

Soit d_i la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i. Comme $e_{m_1+\cdots+m_{i-1}+1}$, …, $e_{m_1+\cdots+m_i}$ est une famille libre de m_i éléments de ce sous-espace propre, on a $m_i \leq d_i$. D'après le Théoreme 2.18, on a toujours l'inégalité inverse $d_i \leq m_i$. Donc $d_i = m_i$. Donc $n = d_1 + \cdots + d_p$. D'après le Lemme 2.20, u est diagonalisable. □

Propriété 2.23. [**Voe02**, Théorème 5-4.25] Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n dont le polynôme caractéristique est scindée. Soit λ_1,…,λ_n les n valeurs propres de u (chacune étant écrite autant de fois que sa multiplicité). On a

$$\operatorname{tr} u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Démonstration dans le cas où u est diagonalisable. Supposons que u est diagonalisable. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale, i. e. de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Par définition de la trace d'une matrice, $\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ et comme A est une matrice triangulaire, $\det u = \det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ et son polynôme caractéristique est scindé et admet pour racines, les éléments sur sa diagonale :

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii}).$$

□

Démonstration. Supposons que $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Alors

$$\chi_u(X) = X^n - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

D'après la proposition 2.14, $\chi_u(X) = X^n - \operatorname{tr} u X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u$.. □

6. Polynômes d'endomorphismes

DEFINITION 2.24. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, une application linéaire de E dans E. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note par u^p, la composée p fois de u, $u \circ \cdots \circ u$: c'est à dire $u^1 = u$, $u^2 = u \circ u$, $u^3 = u \circ u \circ u$, ... Par convention, $u^0 = \mathrm{id}_E$ est l'application identité de E.

Pour tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$$P(X) = \alpha_q X^q + \alpha_{q-1} X^{q-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0,$$

on appelle valeur de P en u, l'endomorphisme de E,

$$P(u) := \alpha_q u^q + \alpha_{q-1} u^{q-1} + \cdots + \alpha_1 u + \alpha_0 \mathrm{id}_E.$$

De même pour une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$, on note par A^p, la *puissance* p-ième de A définie par récurrence par $A^0 = I_n$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $A^{p+1} = A^p A$. On appelle valeur de P en A, la matrice carrée,

$$P(A) := \alpha_q A^q + \alpha_{q-1} A^{q-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n.$$

De manière plus générale, on peut remarquer que ces définitions ont un sens pour une $\mathbb{K}$-algèbre [**Voe02**, DÉFINITION 5-2.1].

PROPRIÉTÉ 2.25. Supposons que E est de dimension finie n. Soit β une base de E. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est la matrice de u relativement à la base β alors A^p est la matrice de u^p relativement à la base β et $P(A)$ est la matrice de $P(u)$ relativement à la base β.

DÉMONSTRATION. L'application M de $\mathcal{L}(E)$ dans $M_n(\mathbb{K})$ qui à un endomorphisme u, associe sa matrice $A := M(u)$ relativement à la base β est un isomorphisme d'algèbres : pour tout u, $v \in \mathcal{L}(E)$ et tout α, $\beta \in \mathbb{K}$

$$M(\alpha u + \beta v) = \alpha M(u) + \beta M(v) \text{ et } M(u \circ v) = M(u)M(v).$$

Par récurrence sur $p \geq 0$, $A^p = M(u)^p = M(u^p)$. Par linéarité,

$$P(A) = P(M(u)) = \alpha_q M(u)^q + \alpha_{q-1} M(u)^{q-1} + \cdots + \alpha_1 M(u) + \alpha_0 I_n =$$

$$\alpha_q M(u^q) + \alpha_{q-1} M(u^{q-1}) + \cdots + \alpha_1 M(u) + \alpha_0 M(\mathrm{id}_E) = M(\alpha_q u^q + \alpha_{q-1} u^{q-1} + \cdots + \alpha_1 u + \alpha_0 \mathrm{id}_E) = M(P(u)).$$

□

Exercice 4

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^4$ définie par tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$ par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x + y + z + t \\ x + 3y + z + t \\ x + y + 3z + t \\ x + y + z + 3t \end{pmatrix}.$$

1) Est ce que f est diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres de f.
2) En déduire le calcul de f^n, le composée n fois de f. (Voir la définition 2.24).

Solution de l'exercice 4

1) La matrice de f dans la base canonique β de $\mathbb{R}^4$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Donc

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} C1 & C2 & C3 & C4 \\ X-3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & X-3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C1+C2+C3+C4 & C2 & C3 & C4 \\ X-6 & -1 & -1 & -1 \\ X-6 & X-3 & -1 & -1 \\ X-6 & -1 & X-3 & -1 \\ X-6 & -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$= (X-6) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & X-3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & X-3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \end{matrix} = (X-6) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L1 \\ L2-L1 \\ L3-L1 \\ L4-L1 \end{matrix}$$

$$= (X-6)(X-2)^3.$$

Les valeurs propres de f sont 6 et 2. Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $f(v_1) = C1 + C2 + C3 + C4 = 6v_1$. Donc v_1 est un vecteur propre. D'après le théorème 2.18, $\operatorname{Ker}(f - 6id_{\mathbb{R}^4})$ est de dimension 1 et admet donc pour base, v_1.

Cherchons $\ker(f - 2id_{\mathbb{R}^4})$. $(f - 2id_{\mathbb{R}^4})\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z+t \\ x+y+z+t \\ x+y+z+t \\ x+y+z+t \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(f - 2id_{\mathbb{R}^4}) \Leftrightarrow x + y + z + t = 0$.

D'après le théorème 2.18, $\operatorname{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^4})$ est de dimension inférieur ou égal à 3. Soient $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La famille v_2, v_3, v_4 est une famille libre de $\ker(f - 2id_{\mathbb{R}^4})$. Donc $\operatorname{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^4})$ est de dimension 3. D'après le théorème 2.11 et [**RDO82**, 9.2.1.9° Théorème réciproque], $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4})$ est une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^4$ formé de vecteurs propres de f. Donc f et A sont diagonalisables. La matrice A est une matrice symétrique. Plus généralement, nous verrons dans le chapitre sur les formes bilinéaires que toute matrice réelle symétrique est diagonalisable.

2) Soit $\beta' = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4})$ la base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^4$. Dans cette base, le calcul de f^n est facile.

$$f^n(a\vec{v_1} + b\vec{v_2} + c\vec{v_3} + d\vec{v_4}) = a6^n\vec{v_1} + b2^n\vec{v_2} + c2^n\vec{v_3} + d2^n\vec{v_4} = \begin{pmatrix} a6^n + (b+c+d)2^n \\ a6^n - b2^n \\ a6^n - c2^n \\ a6^n - d2^n \end{pmatrix}.$$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$. Les coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4})$ sont par définition les nombres réels a, b, c et d tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a\vec{v_1} + b\vec{v_2} + c\vec{v_3} + d\vec{v_4} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccl} a & + & b & + & c & + & d & = & x & (L1) \\ a & - & b & & & & & = & y & (L2) \\ a & & & - & c & + & & = & z & (L3) \\ a & & & & & + & d & = & t & (L4) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a = & \frac{x+y+z+t}{4} & (L1+L2+L3+L4)/4 \\ b = & a-y & = \frac{x-3y+z+t}{4} \\ c = & a-z & = \frac{x+y-3z+t}{4} \\ d = & a-t & = \frac{x+y+z-3t}{4} \end{array} \right.$$

Donc

$$f^n\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a6^n + (b+c+d)2^n \\ a6^n - b2^n \\ a6^n - c2^n \\ a6^n - d2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y+z+t}{4}6^n + \frac{3x-y-z-t}{4}2^n \\ \frac{x+y+z+t}{4}6^n - \frac{x-3y+z+t}{4}2^n \\ \frac{x+y+z+t}{4}6^n - \frac{x+y-3z+t}{4}2^n \\ \frac{x+y+z+t}{4}6^n - \frac{x+y+z-3t}{4}2^n \end{pmatrix}.$$

Donc d'après la propriété 2.25, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6^n + 3\times 2^n & 6^n - 2^n & 6^n - 2^n & 6^n - 2^n \\ 6^n - 2^n & 6^n + 3\times 2^n & 6^n - 2^n & 6^n - 2^n \\ 6^n - 2^n & 6^n - 2^n & 6^n + 3\times 2^n & 6^n - 2^n \\ 6^n - 2^n & 6^n - 2^n & 6^n - 2^n & 6^n + 3\times 2^n \end{pmatrix}.$$

2 ème méthode : Soit P la matrice de passage de β à β'. Alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La résolution du système ci-dessus donne $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

On a $f(\vec{v_1}) = 6\vec{v_1}$, $f(\vec{v_2}) = 2\vec{v_1}$, $f(\vec{v_3}) = 2\vec{v_1}$ et $f(\vec{v_4}) = 2\vec{v_1}$. Donc la matrice de f dans la base β' est

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc comme, d'après la propriété 2.25, A^n est la matrice de f^n dans la base canonique β et D^n la matrice de f^n dans la base canonique β' ou parce que $P^{-1}A^nP = (P^{-1}A^{n-1}P)(P^{-1}AP) = \cdots = (P^{-1}AP)^n$,

$$D^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Donc $A^n = P(D^nP^{-1}) = \frac{1}{4}P\begin{pmatrix} 6^n & 6^n & 6^n & 6^n \\ 2^n & -3\times 2^n & 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n & -3\times 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n & 2^n & -3\times 2^n \end{pmatrix}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6^n+3\times 2^n & 6^n-2^n & 6^n-2^n & 6^n-2^n \\ 6^n-2^n & 6^n+3\times 2^n & 6^n-2^n & 6^n-2^n \\ 6^n-2^n & 6^n-2^n & 6^n+3\times 2^n & 6^n-2^n \\ 6^n-2^n & 6^n-2^n & 6^n-2^n & 6^n+3\times 2^n \end{pmatrix}$. On vérifie pour $n=0$ et $n=1$ que notre formule donne bien I_n et A. □

Théorème 2.26. [**RDO82**, 3.1.2.3° Binôme de Newton] [**AF87**, Théorème III.5.1] *Soient $D \in M_n(\mathbb{R})$ et $N \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commuttent entre elles, i.e. $DN = ND$, alors la formule du binôme de Newton s'applique*

$$(D+N)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} D^k N^{r-k}.$$

Plus généralement, soit A un anneau. Soient D et N deux éléments de A qui commuttent entre eux, i.e. $DN = ND$ alors la formule du binôme de Newton s'applique. En particulier, la formule du binôme de Newton s'applique sur tout anneau commutatif A, par exemple si $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.

Démonstration. Par récurrence, en développant

$$(D+N)^r = \sum_{0\le\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r\le 1} D^{\varepsilon_1}N^{1-\varepsilon_1}D^{\varepsilon_2}N^{1-\varepsilon_2}\ldots D^{\varepsilon_r}N^{1-\varepsilon_r}.$$

Un r-uplet correspond à un chemin de longueur r dans un arbre binaire. (Si $\varepsilon_i = 1$ alors la i-ème épreuve a réussi.) Si $DN = ND$ alors

$$(D+N)^r = \sum_{0\le\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r\le 1} D^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_r}N^{r-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\cdots-\varepsilon_r}$$

$$(D+N)^r = \sum_{k=0}^{r}\sum_{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r=k} D^kN^{r-k} = \sum_{k=0}^{r} D^kN^{r-k}\left(\sum_{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r=k} 1\right)$$

Le nombre d'épreuves qui a réussi dans un chemin est égal à $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r$. Et le nombre de chemins avec k épreuves réussis dans un chemin de longueur r est

$$\left(\sum_{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r=k} 1\right) = \binom{r}{k}.$$

D'où

$$(D+N)^r = \sum_{k=0}^{r} D^kN^{r-k}\binom{r}{k}$$

□

Application : Calcul de la puissance de matrices : https ://www.youtube.com/watch ?v=cImdttQLQlc ou http ://www.jybaudot.fr/Vecteursmatrices/binomemat.html

Exercice 5

Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \ldots & b & b \\ b & a & \ldots & b & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & \ldots & a & b \\ b & b & \ldots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1) Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2) En déduire M^r pour tout $r \in \mathbb{N}$ sans diagonaliser M.
3) Retrouver le résultat de l'exercice précédent quand $a = 3$, $b = 1$ et $n = 4$.

Solution de l'exercice 5

[**LFA77a**, p. 342]

1) On vérifie facilement que $J^2 = nJ$. On en déduit par récurrence que pour tout entier $k \geq 1$, $J^k = n^{k-1}J$.

2) Clairement $M = bJ+(a-b)I_n$. Comme $JI_n = J$ et $I_nJ = J$, bJ et $(a-b)I_n$ commuttent. D'après le binôme de Newton,

$$M^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (bJ)^k \left[(a-b)I_n\right]^{r-k} = (a-b)^r I_n + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (a-b)^{r-k} b^k n^{k-1} J.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (a-b)^{r-k} b^k n^{k-1} = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (a-b)^{r-k} (bn)^k - (a-b)^r\right] = \frac{1}{n}\left[(bn+a-b)^r - (a-b)^r\right]$$

Donc $M^r = (a-b)^r I_n + \frac{1}{n}\left[(bn+a-b)^r - (a-b)^r\right] J$.

3) Quand $a = 3$, $b = 1$ et $n = 4$, $M^r = 2^r I_4 + \frac{1}{4}\left[6^r - 2^r\right] J$. □

7. Théorème de Cayley-Hamilton

THÉORÈME 2.27. *(Cayley-Hamilton) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u : E \to E$ une application linéaire. Soit χ_u le polynôme caractéristique de u. Alors $\chi_u(u) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Admis. □

8. Applications aux suites récurrentes

Exercice 6

Soit $E := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $D : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fait correspondre la suite $D(u) = (D(u)_{n\in\mathbb{N}})$ telle que $D(u)_n = u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

1) Montrer que D est linéaire.
2) Donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
3) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, p réels distincts non nuls. Montrer que la famille des suites géométriques $(\lambda_i^n)_{1\leq i\leq p}$ est libre.

Solution de l'exercice 6

1) Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soient α et β deux réels. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D(\alpha u + \beta v)_n = (\alpha u + \beta v)_{n+1} = \alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1} = \alpha D(u)_n + \beta D(v)_n = (\alpha D(u) + \beta D(v))_n.$$

Donc les suites $D(\alpha u + \beta v)$ et $\alpha D(u) + \beta D(v)$ sont égales.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, et soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors $D(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \geq 0, u_{n+1} = \lambda u_n \Leftrightarrow \forall n \geq 0, u_n = \lambda^n u_0$. Autrement dit, $D((u_{n\in\mathbb{N}})) = \lambda(u_{n\in\mathbb{N}})$ si et seulement si (u_n) est nulle pour tout $n \geq 1$, dans le cas $\lambda = 0$, ou si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison λ, lorsque $\lambda \neq 0$. Il s'ensuit que tout $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de D, avec vecteurs propres associés les suites géométriques non nulles de raison λ lorsque $\lambda \neq 0$, et les suites identiquement nulles à l'exception de leur premier élément lorsque $\lambda = 0$.

3) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1\lambda_1^n + \cdots + \alpha_p\lambda_p^n = 0$. D'après le théorème 2.11 la somme $\ker D - \lambda_1\mathrm{id}_E + \cdots + \ker D - \lambda_p\mathrm{id}_E$ est directe. Pour tout i compris

entre 1 et p, chaque suite $\alpha_i\lambda_i^n$ appartient a un sous-espace propre $\ker D - \lambda_i \mathrm{id}_E$ différent. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i\lambda_i^n = 0$. Donc comme λ_i n'est pas nul, $\alpha_i = 0$. Donc la famille $(\lambda_i^n)_{1\leq i\leq p}$ est libre.

2 ème démonstration en utilisant le theoréme adapté : D'après le théorème 2.11, la somme $\ker D - \lambda_1 \mathrm{id}_E + \cdots + \ker D - \lambda_p \mathrm{id}_E$ est directe. Pour tout i compris entre 1 et p, la suite λ_i^n est une famille libre de $\ker D - \lambda_i \mathrm{id}_E$. D'après le théorème [**RDO82**, 9.1.2.9° Théorème réciproque], La famille $(\lambda_i^n)_{1\leq i\leq p}$, reunion de ces familles libres est une famille libre. □

Soit a_0, a_1 ,..., a_{k-1}, k constantes pas toutes nulles appartenant à $\mathbb{K}$. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_0 u_n.$$

Quitte à remplacer n par $n+1$, on suppose que a_0 est non nul.

Théorème 2.28. [**AF87**, XV.3.5]
L'ensemble $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension k.

Démonstration. Soit $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites vérifiant la relation de récurrence précédente, alors pour tout α, $\beta \in \mathbb{K}$, la suite $\alpha u + \beta v = (\alpha u_n + \beta v_n)$ vérifie la relation de récurrence. Donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'application $ev_k : \mathcal{E} \to \mathbb{K}^k$, qui à toute suite (u_n) associe le k-uplet $(u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$ est linéaire et bijective. □

Théorème 2.29. *Supposons que le polynôme*

$$X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_0$$

admet k racines simples λ_1, ..., λ_k. Toute suite (u_n) de l'ensemble $\mathcal{E}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire $c_1\lambda_1^n + \cdots + c_k\lambda_k^n$ des suites géométriques λ_1^n, ..., λ_k^n où c_1,..., $c_k \in \mathbb{K}$.

Exemple 2.30. On considère la suite de Fibonacci (F_n) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On cherche les suites géométriques λ^n solutions. Alors $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Donc $\lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Donc $F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. $F_0 = c_1 + c_2 = 0$. $F_1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ Donc $c_2 = -c_1$ et donc $F_1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) = c_1\sqrt{5} = 1$. Finalement

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Démonstration. [**AF87**, XV.3 Exemple 4] Cherchons les suites géométriques non nulles $u_n = \lambda^n$ vérifiant la relation de récurrence.

$(u_n) \in \mathcal{E}$ si et seulement si pour tout $n \geq 0$, $\lambda^{n+k} = a_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \cdots + a_0\lambda^n$ si et seulement si $\lambda^k = a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0$.

Car comme λ est non nulle, on peut diviser par λ^n. Supposons que le polynôme

$$X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_0$$

admettent k racines simples λ_1, ..., λ_k. Alors les k suites géométriques λ_1^n, ..., λ_k^n forment une famille de $\mathcal{E}$. Comme a_0 est non nulle, les racines λ_1, ..., λ_k, sont non nulles. D'après l'exercice précédent, cette famille est libre. Et donc d'après le théorème précédent, $\mathcal{E}$ est de dimension k. Donc les k suites géométriques λ_1^n, ..., λ_k^n forment une base de $\mathcal{E}$. □

Deuxième preuve qui se généralise. Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix}$. La relation de récurrence sur la suite u_n se traduit par $X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice transposée de la matrice compagnon du polynôme $X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Par récurrence immédiate

$$X_n = A^n X_0.$$

Soit u l'endomorphisme associée à A dans la base canonique de $\mathbb{K}^k$. En exercice, on a vu que le polynôme caractéristique de la matrice compagnon d'un polynôme est ce polynôme. Comme une matrice et sa transposée ont le même déterminant et le même polynôme caractéristique, $\chi_A(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_0$.

Supposons que ce polynôme admet k racines simples λ_1, ..., λ_k. Alors u admet k valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable. Soit v_i un vecteur propre associè à la valeur propre λ_i. Alors u admet pour matrice dans la base de vecteurs propres $(v_1, \dots, v_k)$, la matrice
$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}.$

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres $(v_1, \dots, v_k)$. Alors $D = P^{-1}AP$. Donc $A = PDP^{-1}$. Donc $A^n = PD^nP^{-1}$.

Donc $X_n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix}$. Donc la suite u_n est une combinaison linéaire des suites géométriques λ_1^n, ..., λ_k^n. □

9. Système d'équations différentielles linéaires du premier ordre

Considérons le système d'équations différentielles :

$$(S) \begin{cases} x' & = 2x + y \\ y' & = x + 2y \end{cases}$$

Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'application vectorielle définie par $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

PROPOSITION 2.31. *Les deux applications $x(t)$ et $y(t)$ sont solutions du système différentiel (S) si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$.*

DÉMONSTRATION. On rappelle que X est dérivable si et seulement si x et y le sont. Dans ce cas, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. $AX(t) = \begin{pmatrix} 2x(t) + y(t) \\ x(t) + 2y(t) \end{pmatrix}$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$ est équivalent à : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x'(t) & = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) & = x(t) + 2y(t) \end{cases}$ □

L'idée pour résoudre le système différentielle est de trouver une bonne base où le système différentiel est plus simple (triangulaire ou diagonale). Nous allons donc diagonaliser A.

Soit f l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^2 - 1^2 = (X-3)(X-1)$.

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $f(v_1) = 3v_1$. Soit $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors $f(v_2) = v_2$. Alors (v_1, v_2) est une base de vecteurs propres de f. Soit B la matrice de f relativement à cette base. $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2). Soit Y l'application vectorielle définie par $Y(t) = P^{-1}X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $X(t) = PY(t)$, $Y(t)$ est le vecteur colonne des coordonnées du vecteur $X(t)$ dans la base (v_1, v_2).

Proposition 2.32. *X est dérivable et $X'(t) = AX(t)$ si et seulement Y est dérivable et $Y'(t) = BY(t)$.*

Démonstration. Comme P^{-1} est une matrice à coefficients constants, Y s'exprime comme combinaisons linéaires à coefficients constants de $x(t)$ et $y(t)$. Donc il est clair que Y est dérivable si et seulement si X est dérivable et que $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.

Comme $A = PBP^{-1}$, $X' = AX \Leftrightarrow X' = PBP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = BP^{-1}X \Leftrightarrow Y' = BY$. □

Soient $a(t)$ et $b(t)$ les coordonnées de $Y(t)$. Alors $Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

D'après l'analogue de la proposition 2.31, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = BY(t)$ si et seulement si les deux applications $a(t)$ et $b(t)$ sont solutions du système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} a' &= 3a \\ b' &= b \end{cases}$$

Les solutions de $b' = b$ sont de la forme $b(t) = b_0 \exp t$. Les solutions de $a' = 3a$ sont de la forme $a(t) = a_0 \exp 3t$.

Conclusion : les solutions du système sont de la forme $a(t) = a_0 \exp 3t$ et $b(t) = b_0 \exp t$ où a_0, b_0 sont des constantes réelles. Il est facile de voir que $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$. Ce qui explique la notation de ces constantes.

Donc $Y' = BY$ est équivalent à $Y = \begin{pmatrix} a_0 \exp 3t \\ b_0 \exp t \end{pmatrix}$ où a_0 et b_0 sont trois constantes réelles. Ceci est équivalent à

$$X = PY = \begin{pmatrix} a_0 \exp 3t + b_0 \exp t \\ a_0 \exp 3t - b_0 \exp t \end{pmatrix}.$$

Bilan : Les solutions de (S) sont $x(t) = a_0 \exp 3t + b_0 \exp t$, et $y(t) = a_0 \exp 3t - b_0 \exp t$ où a_0 et b_0 sont deux constantes réelles.

Nous n'avons pas eu besoin de calculer l'inverse de la matrice P. Par contre, si nous voulons exprimer les solutions en fonction des conditions initiales $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$, cela est necessaire. Comme $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = Y(0) = P^{-1}X(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$,

$a_0 = \frac{1}{2}(x_0 + y_0)$ et $b_0 = \frac{1}{2}(x_0 - y_0)$.

Donc l'unique solution de (S) vérifiant $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ est $x(t) = \frac{x_0}{2}(\exp 3t + \exp t) + \frac{y_0}{2}(\exp 3t - \exp t)$ et $y(t) = \frac{x_0}{2}(\exp 3t - \exp t) + \frac{y_0}{2}(\exp 3t + \exp t)$.

Remarque : Ici, au lieu de diagonaliser, on peut remarquer que (S) est équivalent à

$$\begin{cases} x' + y' &= 3(x+y) \\ x' - y' &= x - y \end{cases}$$

Puis poser $\alpha(t) = x(t) + y(t)$ et $\beta(t) = x(t) - y(t)$. Donc $\alpha(t) = \alpha_0 \exp 3t$ et $\beta(t) = \beta_0 \exp t$. Donc $x(t) = \frac{1}{2}(\alpha(t) + \beta(t)) = \frac{1}{2}(\alpha_0 \exp 3t + \beta_0 \exp t)$. et $y(t) = \frac{1}{2}(\alpha(t) + \beta(t)) = \frac{1}{2}(\alpha_0 \exp 3t + \beta_0 \exp t)$.

Plus généralement

Théorème 2.33. [**LFA77c**, Théorème II.2.1] *Soit A une matrice diagonalisable. Soit f l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^k$. Soit $(v_1, \dots, v_k)$ une base de vecteurs propres de f. Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$ la matrice de f dans cette base Alors 1) les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont toutes les fonctions de la forme*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{k} C_i \exp(\lambda_i t) v_i$$

où C_1, C_2,..., C_k désignent des constantes réelles arbitraires.

2) Il existe une unique solution du système différentiel $X' = AX$ vérifiant la condition initiale $X(0) = X_0$ (Théorème de Cauchy-Lipschitz). Elle est donnée par

$$X(t) = \sum_{i=1}^{k} C_i \exp(\lambda_i t) v_i$$

où $\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix} = P^{-1} X_0$ et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^k$ à la base $(v_1, \dots, v_k)$.

3) l'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$ est un espace vectoriel de dimension k.

Démonstration. 1) La preuve est la même que dans l'exemple précédent. $Y = \begin{pmatrix} C_1 \exp \lambda_1 t \\ \vdots \\ C_k \exp \lambda_k t \end{pmatrix}$

Y est le vecteur colonnes des coordonnées de $X(t)$ dans la base $(v_1, \dots, v_n)$. Donc

$$X = \sum_{i=1}^{k} C_i \exp(\lambda_i t) v_i.$$

2) $X_0 = X(0) = PY(0)$ Donc $Y(0) = P^{-1} X_0$.

3) Si $\sum_{i=1}^{k} C_i \exp(\lambda_i t) v_i = 0$ Alors comme les v_i sont libres, $C_i \exp(\lambda_i t) = 0$ Donc $C_i = 0$. Donc la famille de fonctions vectorielles $\exp(\lambda_i t) v_i$ est une base. □

10. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Considérons l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre k

$$y^{(k)} = a_{k-1} y^{(k-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y. \quad (E)$$

Cherchons les solutions de la forme $y(t) = \exp(\lambda t)$. Alors y vérifie (E) si et seulement si

$$\lambda^k \exp(\lambda t) = a_{k-1} \lambda^{k-1} \exp(\lambda t) + \cdots + a_1 \lambda \exp(\lambda t) + a_0 \exp(\lambda t).$$

En divisant par $\exp(\lambda t)$, on obtient que y vérifie (E) si et seulement si λ est solution du polynôme
$$X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_0.$$

Théorème 2.34. [**LFA77c**, Cas particulier du Théorème II.6.5] *Supposons que le polynôme*
$$X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_0$$
admet k racines simples λ_1, …, λ_k. Alors 1) les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme
$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i \exp(\lambda_i t)$$
où c_1, c_2,…, c_k désignent des constantes réelles arbitraires.

2)(Théorème de Cauchy-Lipschitz) Il existe une unique solution y de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, …, $y^{(k-1)}(0) = y_{k-1}$.

3) L'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension k de base, la famille des $\exp(\lambda_i t)$.

Démonstration. 1) Il est clair par linéarité que les fonctions de la forme
$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i \exp(\lambda_i t)$$
sont solutions de (E).

Réciproquement soit $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}$. Alors la fonction $y(t)$ est solution de (E) si et seulement si X vérifie le système différentielle $X'(t) = AX(t)$ où A est la matrice transposée de la matrice compagnon du polynôme $X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_0$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{k-1} \end{pmatrix}.$$
Soit u l'endomorphisme associée à A dans la base canonique de $\mathbb{K}^k$. En exercice, on a vu que le polynôme caractéristique de la matrice compagnon d'un polynôme est ce polynôme. Comme une matrice et sa transposée ont le même déterminant et le même polynôme caractéristique, $\chi_A(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_0$.

Supposons que ce polynôme admet k racines simples λ_1, …, λ_k. Alors u admet k valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable. Soit v_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. D'après le Théorème précédent,
$$X(t) = \sum_{i=1}^{k} C_i \exp(\lambda_i t) v_i.$$
En regardant la première coordonnée,
$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i \exp(\lambda_i t)$$
où c_i est le produit de C_i par la première coordonnée de v_i.

2) En dérivant $(k-1)$ fois, la formule,

$$y(t)=\sum_{i=1}^{k} c_i \exp(\lambda_i t)$$

puis en faisant $t=0$. On obtient le système de k équations linéaires à k inconnues $c_1,\ldots, c_k$: $\sum_{i=1}^{k} c_i = y_0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i = y_1$, …, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{k-1} c_i = y_k$.

Son déterminant est le déterminant de Vandermonde suivant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq k} (\lambda_j-\lambda_i) \neq 0.$$

Donc le système est de Cramer et admet une unique solution $c_1,\ldots, c_k$. Donc la fonction $y(t)$ est unique.

3) Montrons que la famille des $\exp(\lambda_i t)$ est une famille libre (Voir aussi Exo 3) Soit c_1, $c_2,\ldots, c_k$, k réels tels que pour tout t, $0=\sum_{i=1}^{k} c_i \exp(\lambda_i t)$. D'après la démonstration du 2) dans le cas où $y(t)$ est la solution nulle, $c_1,\ldots, c_k$ sont tous nuls.

D'après le 1), la famille des $\exp(\lambda_i t)$ est aussi une famille génératrice donc c'est une base de l'ensemble des solutions (E) qui est donc de dimension k. □

Exemple 2.35 (Equations différentielles linéaires du second ordre). Déterminons les solutions y de l'équation différentielle : $y" = a_1 y' + a_0 y$. On cherche les solutions de la forme $y=\exp(\lambda t)$. On obtient le polynôme $\lambda^2 - a_1\lambda - a_0$. Soit $\Delta = a_1^2 + 4a_0$.

Supposons que $\Delta > 0$. Alors ce polynôme admet deux racines réelles distinctes. D'après le Théorème précédent, y s'écrit de manière unique comme une somme $c_1\exp(\lambda_1 t)+c_2\exp(\lambda_2 t)$ où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles.

Supposons que $\Delta < 0$. Alors ce polynôme admet deux racines complexes conjugues $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. D'après le Théorème précédent qui s'applique aussi aux fonctions $y:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de variable réelle à valeurs complexes, y s'écrit de manière unique comme une somme $c_1\exp(\lambda_1 t)+c_2\exp(\lambda_2 t) = c_1\exp(\alpha t)\exp(i\beta t)+c_2\exp(\alpha t)\exp(-i\beta t)$ où c_1 et c_2 sont deux constantes complexes.

Cherchons maintenant les solutions à valeurs réelles, $\forall t\in\mathbb{R}, y(t)\in\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall t\in\mathbb{R}, y(t)=\overline{y(t)}$ ssi $\forall t\in\mathbb{R}, c_1\exp(\alpha t)\exp(i\beta t)+c_2\exp(\alpha t)\exp(-i\beta t) = \overline{c_1}\exp(\alpha t)\exp(-i\beta t)+\overline{c_2}\exp(\alpha t)\exp(i\beta t)$ ssi c_2 est le conjugué de c_1 (car la famille des $\exp(\lambda_i t)$ est libre). Donc $y(t)=\exp(\alpha t)(c_1\exp(i\beta t)+\overline{c_1}\exp(-i\beta t))$. En posant $c_1 = \frac{a}{2} - i\frac{b}{2}$, on obtient que $y(t) = \exp(\alpha t)\,(a\cos(\beta t)+b\sin(\beta t))$ où a et b sont deux constantes réelles.

11. Corrigé des exercices

Bibliographie

[AF87] Jean-Marie Arnaudiès and Henri Fraysse, *Cours de mathématiques. 1*, Dunod, Paris, 1987, Algèbre. [Algebra].

[LFA77a] Jacqueline Lelong-Ferrand and Jean-Marie Arnaudiès, *Cours de mathématiques. Tome 1*, Dunod, Paris, 1977, Algèbre, Troisième édition, 1er Cycle Universitaire. Classes Préparatoires. Mathématiques.

[LFA77b] ______, *Cours de mathématiques. Tome 2*, Dunod, Paris, 1977, Analyse, Quatrième édition, 1er Cycle Universitaire. Classes Préparatoires. Mathématiques.

[LFA77c] ______, *Cours de mathématiques. Tome 4*, Dunod, Paris, 1977, Équations différentielles, intégrales multiples, fonctions holomorphes, Deuxième édition, corrigée, 1er Cycle Universitaire. Classes Préparatoires. Mathématiques. MR 0476228

[RDO82] E. Ramis, C. Deschamps, and J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales. 1*, second ed., Masson, Paris, 1982, Algèbre.

[RDW01] J.F. Ruaud, C. Deschamps, and A. Warusfel, *Mathématiques 2e année : cours et exercices corrigés*, J'intègre. Mathématiques. Cours. Série E. Ramis, Dunod, 2001.

[Voe02] Jean Voedts, *Cours de mathématiques MP-MP**, Ellipses, Paris, 2002.

12. Livres à télécharger

Pour vous aider, j'ai mis les livres de la bibliographie (à l'exception notable de [**LFA77a, LFA77b**] que je n'ai pas trouvé sur Internet) et d'autres livres à télécharger rapidement sur la page cachée suivante de ma page web

`http://www.math.univ-angers.fr/perso/lmenichi/Groupedetravail/`

Veuillez ne pas faire de lien sur cette page web. Car cette page illégale ne doit pas être indexée par google. Merci.

La plupart des livres sont sous le format .djvu. Il faut donc un logiciel de lecture qui lit le format deja vu. Cliquer pour accéder à la page wikipedia qui explique :

-Si vous êtes sous linux, Evince est sûrement déjà installé.

-Vous pouvez installer par exemple, le logiciel libre DjVuLibre. Si vous êtes sous Windows, cliquer ici pour télécharger la version pour Windows.

-Sur votre smartphone, à vous de voir.

Vous pouvez télécharger d'autres livres sur le site pirate library genesis.