

Arithmétique

Corrigé CC2, 27/4/2017

Exercice 1

1) Petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier

$$a) \forall a \in \mathbb{Z} \quad a^p \equiv a \pmod{p}$$

$$b) \text{ Pour tout entier relatif } a \text{ non divisible par } p \left(\Leftrightarrow \text{pgcd}(a, p) = 1 \right)$$

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

2) a) Si k est un entier compris entre 1 et $p-1$.

Alors k n'est pas divisible par p .

$$\text{Donc d'après le petit théorème de Fermat } k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

b) d'après a),

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} 1 \equiv (p-1) \times 1 \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p}$$

Exercice 2

13 et 17 sont premiers entre eux. Algorithme d'Euclide (étendu)

$$\begin{cases} 17 = 13 \times 1 + 4 \\ 13 = 4 \times 3 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = 17 - 1 \times 13 \\ 1 = 13 - 3 \times 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{on peut le faire} \\ \text{sous forme de tableau} \end{array}$$

$$\text{donc } 1 = 13 - 3 \times (17 - 1 \times 13) = 4 \times 13 - 3 \times 17$$

$$\text{donc } 4 \times 13 \equiv 1 \pmod{13} \quad \text{et} \quad 4 \times 13 \equiv 1 \pmod{17}$$

$$\text{et } -3 \times 17 \equiv 1 \pmod{13} \quad \text{et} \quad -3 \times 17 \equiv 0 \pmod{17}$$

$$\text{donc } x = -4 \times 3 \times 17 + 5 \times 4 \times 13 = -12 \times 17 + 20 \times 13$$

$$= -204 + 260 = 56 \text{ est } \text{une solution particulière}$$

(2)

$$\text{de } 5) \begin{cases} x \equiv 4 [13] \\ x \equiv 5 [17] \end{cases}$$

$$x \text{ vérifie } 5) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 56 \equiv 0 [13] \\ x - 56 \equiv 0 [17] \end{cases} \Leftrightarrow 13 \text{ et } 17 \text{ divisent } x - 56$$

$$\xRightarrow{\text{Gauss}} 13 \times 17 \mid x - 56$$

$$\text{Réciproquement Si } 13 \times 17 \mid x - 56 \text{ alors } 13 \mid (x - 56) \text{ et } 17 \mid (x - 56)$$

$$13 \times 17 = 221$$

$$\text{et } 17 \mid (x - 56)$$

$$\text{donc } (5) \Leftrightarrow x \equiv 56 [221]$$

$$\begin{cases} x \equiv 2 [16] \\ x \equiv 4 [12] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 2 [4] \\ x \equiv 4 [4] = 0 [4] \end{cases} \text{ impossible}$$

donc pas de solutions

Exercice 3 . Solution particulière évidente $13 \times 3 - 11 \times 3 = 6$

Alternative: $13 \wedge 11 = 1$ Algorithme d'Euclide (étendu)

$$\begin{cases} 13 = 1 \times 11 + 2 \\ 11 = 5 \times 2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 13 - 1 \times 11 \\ 1 = 11 - 5 \times 2 \end{cases}$$

$$\text{donc } 1 = 11 - 5 \times (13 - 1 \times 11) = 6 \times 11 - 5 \times 13$$

$$\text{donc } 13 \times (-5) + 11 \times 6 = 1$$

$$\text{donc } 13 \times (-5 \times 6) + 11 \times 6 \times 6 = 1 \times 6 = 6$$

$$13 \times (-30) + 11 \times 36 = 6$$

Solution particulière trouvée par le calcul

(3)

$$13x - 11y = 6 = 13 \times (-30) + 11 \times 36$$

$$\Leftrightarrow 13(x+30) - 11(y+36) = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 13 \mid 11(y+36) \\ \text{Car } 13 \wedge 11 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 13 \mid y+36$$

$$\Rightarrow y+36 = 13k$$

$$\text{donc } 13(x+30) = 11(y+36) = 11 \times 13k$$

$$\text{donc } x+30 = 11k$$

$$\text{Réciproquement si il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \begin{cases} x+30 = 11k \\ y+36 = 13k \end{cases}$$

$$\text{alors } 13(x+30) - 11(y+36) = 13 \times 11k - 11 \times 13k = 0$$

Bien

$$13x - 11y = 6 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} x = -30 + 11k \\ y = -36 + 13k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \begin{cases} x = 3 + 11m \\ y = 3 + 13m \end{cases}$$

Exercice 4.

Démonstration par l'absurde. Supposons $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

$$\text{Alors } \sqrt{3} = \frac{p}{q} \text{ avec } p \wedge q = 1$$

$$\text{donc } 3 = \frac{p^2}{q^2} \quad q^2 \times 3 = p^2$$

$$\text{donc } 3 \mid p^2 \xrightarrow{\text{Gauss}} 3 \mid p \text{ car } 3 \text{ est premier}$$

donc $p = 3 p'$

donc $p^2 = 9 p'^2 = 3 q^2$

donc $3 p'^2 = q^2$

donc $3/q^2 \Rightarrow 3/q$ (Gauss 3 premier)

donc $3/p \wedge q = 1$ Contradiction

Exercice 5

a) $X^2 - 3X + 1 = X^2 + 1 - 3X$

$X^2 + 1 = -3X \times \frac{X}{3} + 1$

donc $\text{pgcd}(A, B) = 1$

b)
$$\left. \begin{aligned} 1 &= X^2 + 1 + \frac{X}{3} \times (-3X) \\ 3X &= X^2 + 1 - (X^2 - 3X + 1) \end{aligned} \right\}$$

donc

$$\begin{aligned} 1 &= \underbrace{(X^2 + 1)}_V + \underbrace{\frac{X}{3}}_B \left[\underbrace{(X^2 - 3X + 1)}_U - \underbrace{(X^2 + 1)}_A \right] \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{X}{3}\right)}_V \underbrace{(X^2 + 1)}_B + \underbrace{\frac{X}{3}}_U \underbrace{(X^2 - 3X + 1)}_A \end{aligned}$$

Exo 6

Soit $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ $P' = (n+1)aX^n + nbX^{n-1}$

$(X-1)^2 / P \Leftrightarrow 1$ racine de multiplicité ≥ 2 de P

$\Leftrightarrow P(1) = 0$ et $P'(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ (n+1)a + nb = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a - 1 \\ (n+1)a + n(-a - 1) - n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -n - 1 \\ a = n \end{cases}$